Bölüm 10

BÖLÜM UZAYLARI

10.1 BÖLÜM TOPOLOJİSİ

Tanım 10.1.1. $(X, \mathscr{T})$ bir topolojik uzay olsun ve X kümesi üzerinde bir β eşdeğerlik (denklik) bağıntısı verilsin. $\varphi : X \to X/\beta$ bölüm dönüşümüne göre, $\mathscr{T}$ topolojisinin X/β bölüm kümesi üzerindeki tümel topolojisine, $\mathscr{T}$ nun β ye göre *bölüm topolojisi* denilir. Bölüm topolojisini $\mathfrak{U}$ ile gösterelim. $(X/\beta, \mathfrak{U})$ uzayına da $(X, \mathscr{T})$ uzayının β ye göre *bölüm uzayı*, diyeceğiz.

Önerme 10.1.1. *Bir $U \subset X/\beta$ kümesinin $\mathfrak{U}$ bölüm topolojisine ait olması için gerekli ve yeterli koşul $\varphi^{-1}(U) \in \mathscr{T}$ olmasıdır.*

İ S P A T: `Önerme` 8.2.1 den çıkar.

Önerme 10.1.2. *X/β bölüm kümesi üzerinde, $\varphi : (X, \mathscr{T}) \to X/\beta$ bölüm dönüşümünü sürekli kılan en ince dokulu topoloji $\mathfrak{U}$ bölüm topolojisidir.*

İspat için tümel topoloji tanımına bakınız. (Tanım 8.2.1). Bu önerme Tanım 8.2.2 ile verilen bölüm topolojisinin tanımı olarak kullanılmıştır.

Önerme 10.1.3. *$g : (X/\beta, \mathfrak{U}) \to (Z, \mathscr{W})$ fonksiyonunun sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul $g \circ \varphi$ nin sürekli olmasıdır.*

İspat için `Önerme` 8.2.2 ye bakınız.

Önerme 10.1.4. *Bir $K \subset X/\beta$ alt-kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul $\varphi^{-1}(K) \subset X$ alt-kümesinin kapalı olmasıdır.*

Bkz. `Sonuç` 8.2.1.

Örnek 10.1.1. Çember üzerindeki topoloji.

Bükülür, ince ve düzgün bir tel alalım. Bu teli bükerek iki ucunu bir araya getirelim. Meydana gelen şekil bir çembere benzeyebilir. Bükme işi düzgün yapılmamışsa bile, meydana gelen şekil topolojik olarak bir çembere eşyapılı olacaktır. Şimdi, bu tel üzerine öyle bir topolojik yapı kuracağız ki çemberinkiyle eşyapılı olacaktır. Kolaylık olması için, ele aldığımız ince teli 2π uzunluğunda varsayalım ve dolayısıyla, bu teli $I = [0, 2\pi]$ kapalı aralığı ile temsil edelim. Bu aralık üzerine, gerçel eksenin salt topolojisinin kondurduğu topolojiyi $\mathscr{J}$ ile gösterelim. Ayrıca düzlemdeki

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 = 1\}$$

birim çemberi üzerine, düzlemin salt tolojisinin kondurduğu topolojiyi $\mathscr{V}$ ile gösterelim. Bu çemberin çevre uzunluğu aldığımız telin uzunluğuna eşittir. Ancak, kuracağımız topolojik eşyapılılık için bu eşitliğin gerekli olmadığını ileride göreceğiz.

Telin iki ucunu birleştirdiğimizde 0 ve 2π ile temsil edilen uç noktalar çakıştığında, bu iki noktayı aynı bir nokta imiş gibi düşünebiliriz. Bunu matematiksel olarak ifade etmek için, X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanan bir $\sim$ denklik bağıntısı kuralım: Her $t, s \in I$ için

$$t \sim s \Leftrightarrow [((t = 0) \wedge (s = 2\pi)) \vee ((t = 2\pi) \wedge (s = 0)) \vee (t = s)]$$

olsun. Bu bağıntıya göre her hangi bir $t \in I$ öğesinin denklik sınıfı

$$[t] = \{s \in I : t \sim s\}$$

olmak üzere

$$Y = I/\sim \quad = \quad \{[t] : t \in I\}$$

diyelim. Denklik sınıflarından oluşan Y kümesine, I kümesinin $\sim$ denklik bağıntısına göre bölüm kümesi diyoruz. Kolayca görüleceği gibi

$$[0] = [2\pi] = \{0, 2\pi\}$$

$$[t] = \{t\}, 0 < t < 2\pi$$

dir. Şimdi yapacağımız iş, B çemberi üzerindeki topolojiye eşyapılı olan bir topolojiyi Y üzerine koymaktır. Verilen teli birim çember üzerine düzgün olarak yerleştirelim. Koordinat sistemi öyle seçilebilir ki I dan B çemberi üzerine tanımlanan

$$f : t \to (\cos t, \sin t) \tag{10.1}$$

dönüşümü şu özelliklere sahip olur:

Her $(x, y) \in B$ için, eğer $(x, y) \neq (1, 0)$ ise

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad , \quad (0 < t < 2\pi) \tag{10.2}$$

olacak şekilde bir $t \in I$ öğesi vardır. Eğer $(x, y) = (1, 0)$ ise I kümesine ait $t = 0$ ve $t = 2\pi$ öğeleri bu noktaya tekabül ederler; yani

$$(x, y) = (1, 0) \Rightarrow (\cos 0, \sin 0) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) \tag{10.3}$$

olur. O halde her $s, t \in I$ için, (10.1) uyarınca

$$t \sim s \iff f(t) = f(s) \tag{10.4}$$

olacaktır. Öyleyse, Y bölüm kümesinden B çemberi üzerine şöyle bir h fonksiyonu tanımlayabiliriz:

Her $[t] \in Y$ için, $[t]$ denklik sınıfının her hangi bir t temsilcisini seçerek

$$h([t]) = f(t), \quad (t \in [t]) \tag{10.5}$$

diyelim. h fonksisyonunun iyi tanımlı olduğu hemen görülebilir. Gerçekten $t \in [t]$ yerine $s \in [t]$ alınırsa, (10.4) ve (10.5) den

$$h([t]) = f(s) = f(t)$$

çıkar. Öte yandan $h : Y \to B$ fonksiyonunun BBÖ olduğunu görmek için

$$[t] = [s] \Leftrightarrow h([t]) = h([s])$$

bağıntısı yeterlidir. Artık, Y üzerine B üzerindeki $\mathscr{V}$ topolojisine eşyapılı olan bir $\mathfrak{U}$ topolojisi koymak kolaydır. Bu iş için, B üzerindeki topolojinin h fonksiyonuna göre ters resmini almak yetecektir; yani

$$\mathfrak{U} = \{h^{-1}(V) : V \in \mathscr{V}\}$$

istediğimiz topolojidir. Böylece $(Y, \mathfrak{U})$ uzayı ile $(B, \mathscr{V})$ uzayı topolojik eşyapılı iki uzay olur.

Şimdi $(I, \mathscr{J})$ uzayının $\sim$ denklik bağıntısına göre bölüm uzayının $(Y, \mathfrak{U})$ uzayı olduğunu göstereceğiz. I kümesinden Y bölüm kümesine, her $t \in I$ için $\varphi(t) = [t]$ diye tanımlanan bölüm dönüşümünü düşünürsek (10.5) uyarınca,

$$h(\varphi(t)) = f(t), \quad (t \in I)$$

yazabiliriz; yani

$$h \circ \varphi = f$$

dir. Tabii, burada h fonksiyonunun BBÖ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$f^{-1}(h(U)) = \varphi^{-1}(U), \quad U \subset Y \tag{10.6}$$

olur. Artık aşağıdaki özeliği ispatlayabiliriz:

$$V \in \mathscr{V} \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \mathscr{J} \tag{10.7}$$

Gerçekten, $t \to \cos t$ ve $t \to \sin t$ bileşenleri sürekli olduğundan f fonksiyonu süreklidir; O halde, V kümesi B uzayında açıksa $f^{-1}(V)$ ters resmi I uzayında açık olacaktır. Tersine olarak, $V \subset B$ alt-kümesi öyle verilsin ki, bunun $f^{-1}(V)$ ters resmi I uzayında açık bir küme olsun. Göstereceğiz ki V kümesi B uzayında açıktır. Bu iş için her $(x, y) \in V$ öğesine karşılık, B çemberi üzerinde (x, y) noktasını içeren ve V tarafından kapsanan açık bir yayın varlığını göstermek yetecektir. Çünkü B üzerindeki açık yaylar $\mathscr{V}$ topolojisinin bir tabanıdır (bkz. `Örnek` 8.18). Çözümü iki durum için ayrı ayrı yapacağız:

Durum 1: $(x, y) \neq (1, 0)$ olsun. Bu durumda, (10.2) uyarınca, öyle bir tek $t \in I, \quad (0 < t < 2\pi)$ öğesi vardır ki $(x, y) = f(t)$ olur. f sürekli oldluğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi, I uzayında t öğesinin bir açık komşuluğudur. O halde $t \in (s, u) \subset f^{-1}(V)$ olacak şekilde açık bir (s, u) aralığı vardır. (Neden?) Bu açık aralığın f fonksiyonu altındaki resmi B üzerinde açık bir yaydır ve bu $f\ ((s, u))$ açık yayı aradığımız yaydır.

Durum 2: $(x, y) = (1, 0)$ olsun. Bu durumda, (10.3) uyarınca, $f(0) = (1, 0) = f(2\pi)$ olduğundan $t = 0$ ve $t = 2\pi$ uç noktaları $f^{-1}(V)$ kümesine aittir. O halde, öyle s, u noktaları vardır ki,

$$\begin{aligned} &0 < s < u < 2\pi \\ &[0, s) \cup (u, 2\pi] \subset f^{-1}(V) \end{aligned}$$

olur, ki buradan,

$$f([0, s)) \cup f((u, 2\pi])$$

bileşimi istenen açık yay olacaktır.

Böylece (10.7) özeliği ispatlanmış olur. Artık $\mathfrak{U}$ topolojisinin $\mathscr{J}$ nin bölüm topolojisi olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten (10.6) ve (10.7) ifadelerinden

$$\begin{aligned} U \in \mathfrak{U} &\Leftrightarrow h(U) \in \mathscr{V} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(h(U)) \in \mathscr{J} \\ &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U) \in \mathscr{J} \end{aligned}$$

çıkar; yani

$$\mathfrak{U} = \{U \subset Y \quad | \quad \varphi^{-1}(U) \in \mathscr{J}\}$$

dır. `Önerme` 10.1.1 uyarınca, $\mathfrak{U}$ topolojisi, $\mathscr{J}$ topolojisinin $\sim$ denklik bağıntısına göre bölüm topolojisinden başka bir şey değildir.

Bu örnek bize, birim çember üzerindeki $\mathscr{V}$ topolojisi yerine Y bölüm kümesi üzerindeki $\mathfrak{U}$ bölüm topolojisini alabileceğimizi göstermektedir.

Örnek 10.1.2. s ile t gerçel sayıları arasındaki fark 2π sayısının bir tam katına eşitse, yani $s - t = 2k\pi$ olacak şekilde bir k tam sayısı varsa $s \equiv t(\mathrm{mod} 2\pi)$ diyoruz. Bu bağıntı $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $\mathbb{R}$ nin bu bağıntıya göre bölüm kümesini $\mathbb{R}/(\mathrm{mod} 2\pi)$ ile gösterelim. Kolayca görülebileceği gibi, yukarıdaki örnekte incelediğimiz $I/\sim$ kümesi ile $\mathbb{R}/(\mathrm{mod} 2\pi)$ kümesi eşgüçlüdürler. Gerçekten, I üzerinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı $\mathbb{R}$ üzerindeki $s \equiv t$ $(\mathrm{mod} 2\pi)$ bağıntısının $[0, 2\pi]$ aralığı üzerine kısıtlanmışından başka bir şey değildir. Dolayısıyla $I/\sim$ üzerine de kurulabilir ve bu topoloji $\mathbb{R}$ üzerindeki salt topolojinin $\mathbb{R}/(\mathrm{mod} 2\pi)$ üzerindeki bölüm topolojisidir.

Tabii, bunun yine birim çember üzerindeki $\mathscr{V}$ topolojisine eşyapılı olacağı apaçıktır. Bu özelik Fourier Analizinde büyük bir öneme sahiptir. [21], [11], [26]

Örnek 10.1.3. `Örnek` 10.1.1 te alınan I aralığının uzunluğunun birim çember ile kurulacak eşyapılılık için önemli olmadığını söylemiştik. Bu uzunluğa denklik bağıntısının *periyotu* diyeceğiz. Periyot uzunluğunu istediğimiz gibi saptayabiliriz. Gerçekten $[0, 2\pi]$ aralığı yerine, örneğin, $[0, 1]$ birim aralığı konulursa `Örnek` 10.1.1 deki işler aynen tekrarlanabilir. Bu durumda, $[0, 1]$ aralığından birim çembere (10.1) ile tanımlanan fonksiyon yerine

$$f : t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

fonksiyonunu almak gerekecektir.

Tabii, $[0,1]$ aralığı yerine bütün $\mathbb{R}$ gerçel sayı eksenini alıp üzerinde

$$x \equiv y(\text{mod}1) \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

denklik bağıntısını tanımlayabiliriz. Salt topolojinin $\mathbb{R}/(\text{mod}1)$ bölüm kümesi üzerindeki bölüm topolojisi, birim çember üzerindeki $\mathscr{V}$ topolojisine eşyapılıdır.

$(X, \mathscr{T})$ uzayından $(X/\beta, \mathfrak{U})$ bölüm uzayına tanımlanan φ bölüm dönüşümü açık (ya da kapalı) bir dönüşüm olmak zorunda değildir. Ama bu dönüşüm, X uzayının bazı açık kümelerini X/β bölüm uzayının açık kümeleri üzerine resmeder. Şimdi bu özeliği inceleyelim.

Tanım 10.1.2. Aşağıdaki özeliklere sahip bir $A \subset X$ alt-kümesine (β denklik bağıntısına göre) *doymuş bir kümedir,* denilir:

$$x \in A \quad \text{ve} \quad y\beta x \Rightarrow y \in A$$

Yani doymuş bir küme, birbirine denk olan bütün öğeleri içeren bir kümedir. Bölüm kümesine ait her alt-kümenin bölüm dönüşümü altındaki ters resmi daima doymuş bir kümedir. Gerçekten $V \subset X/\beta$ ise

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}(V) \quad \text{ve} \quad x\beta y &\Rightarrow \varphi(x) \in V \\ \varphi(x) = \varphi(y) &\Rightarrow y \in \varphi^{-1}(V) \end{aligned} \tag{10.8}$$

olur ve bu isteneni ispatlar. Tersine olarak, $A \subset X$ doymuş bir küme ise $A = \varphi^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $V \subset X/\beta$ kümesi vardır. Gerçekten $V = \varphi(A)$ kümesi isteneni sağlayacaktır. Çünkü

$$A \quad \text{doymuş} \quad \Rightarrow \varphi^{-1} \circ \varphi(A) = A \tag{10.9}$$

olur (bkz. 6.Problem). Ayrıca, φ örten bir dönüşüm olduğundan, her $U \subset X/\beta$ için

$$\varphi \circ \varphi^{-1}(U) = U \tag{10.10}$$

olacaktır. Bu özelikleri kullanarak şu önermeyi söyleyebiliriz:

Önerme 10.1.5. *Bölüm topolojisinin açık kümeleri doymuş açık kümelerin bölüm dönüşümü altındaki resimlerinden ibarettir.*

İ S P A T: `Önerme` 10.1.1 ile (10.9) ve (10.10) uyarınca

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} &= \{U \subset X/\beta \mid \varphi^{-1}(U) \in \mathscr{T}\} \\ &= \{\varphi(T) \mid T \in \mathscr{T} \quad \text{ve} \quad T \quad \text{doymuş}\}\end{aligned} \tag{10.11}$$

eşitliği kolayca sağlanabilir.

Elbette, yukarıdaki önerme bölüm dönüşümünün açık bir dönüşüm olduğu anlamına gelmez. Çünkü, bu dönüşümün, doymuş açık kümeleri açık kümeler üzerine resmedeceğini biliyoruz. Herhangi bir açık kümeyi açık bir küme üzerine resmetmeyebilir. Benzer olarak, bölüm dönüşümünün kapalı bir dönüşüm olması gerekmediğini de söyleyebiliriz (bkz. 2.Problem). [15], [16] , [18]

10.2 KARMA PROBLEMLER

1. Bir topolojik uzay üzerinde *eşitlik* bağıntısı bir denklik bağıntısı olarak düşünülebilir. Buna göre oluşacak bölüm uzayını bulunuz.

2. $\varphi : X \to X/\beta$ bölüm dönüşümünün açık bir dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul, her $A \subset X$ alt-kümesi için $\varphi(A^\circ) = (\varphi(A))^\circ$ olmasıdır. Benzer olarak, bölüm dönüşümünün kapalı bir dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul her $A \subset X$ alt-kümesi için $\varphi(\bar{A}) = \overline{(\varphi(A))}$ olmasıdır. Gösteriniz.

3. Kapalı birim aralığı I ile gösterelim; yani $I = [0, 1]$ olsun. $K = I \times I$ kapalı birim karedir. Bunun üzerinde, düzlemin salt topolojisinin kondurduğu topoloji varolsun. K nın düşey iki kenarı üzerinde yükseklikleri eşit olan noktaları birbirine denk sayan bir denklik bağıntısı tanımlayalım. Bu bağıntıya göre K nın bölüm kümesi $B \times I$ dairesel silindiridir. Bölüm uzayı inceleyiniz. (B birim çemberdir.)

4. Önceki soruda K nın yalnız düşey kenarları üzerinde denklik kurmuştur. Şimdi buna ek olarak yatay kenarlar üzerinde de, sol kenara olan uzaklıkları eşit olan noktaları denk sayan bir bağıntı düşünelim. Bu bağıntıya göre, K nın bölüm kümesi $B \times B$ toru (simit yüzeyi) dur. Bu tor $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ Öklid uzayının bir alt uzayıdır. İnceleyiniz.

5. Birim karenin düşey kenarları üzerinde birisi aşağıdan yukarıya doğru, ötekisi yukarıdan aşağıya doğru ölçülmek üzere, eşit uzaklıktaki nokta-

ları denk sayan bir bağıntı düşünelim. Bu bağntıya göre K nın bölüm kümesi Möbiüs şerididir. İnceleyiniz.

6. β bağıntısı X kümesi üzerinde bir *denklik bağıntısı* olsun. Eğer $A \subset X$ alt-kümesi β bağıntısına göre doymuş bir küme ise $\varphi^{-1} \circ \varphi(A) = A$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

7. Önerme 10.1.5 in ispatında varlığı söylenen eşitliği sağlayınız.

8. $\varphi : X \longrightarrow Y$ bir bölüm dönüşümü ise, φ nin bir doymuş açık ya da kapalı alt kümeye kısıtlanmışı da bir bölüm dönüşümüdür. Gösteriniz.

9. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ sürekli ve örten bir fonksiyon ise $\mathscr{T}$ topolojisinin bir tabanını $\mathscr{S}$ topolojisinin bir tabanına resmeder mi? Simgelerle söylersek, $\mathscr{B}$ ailesi $\mathscr{T}$ topolojisinin bir tabanı olduğunda $f(\mathscr{B})$ ailesi $\mathscr{S}$ topolojisinin bir tabanı olur mu? Neden?

10. $I : (X, \mathscr{T}) \to (X, \mathscr{T})$ özdeşlik (birim) fonksiyonu her $x \in X$ için $I(x) = x$ olan fonsiyondur. I özdeşlik dönüşümünün bir topolojik eşyapı dönüşümü (homeomorphism) olduğunu gösteriniz.

11. $f : (X, \mathscr{T}) \to (Y, \mathscr{S})$ fonksiyonu bire-bir-içine (injective) olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonlarının her ikisi de sürekli iseler, f fonksiyonuna bir *gömme dönüşümüdür*, denilir. Bu durumda, her $x \in X$ için $g : x \to f^{-1} o f(x)$ diye tanımlanan g fonksiyonu bir topolojik eşyapı dönüşümüdür (homeomorphism). Gösteriniz

12. Bir $\mathfrak{s}$ ailesini alt-taban olarak kabul eden topolojinin, $\mathfrak{s}$ ailesini kapsayan bütün topolojilerin arakesitine eşit olduğunu gösteriniz (bkz. `Önerme` 7.2.2).

13. *Topolojik Toplam Uzay:* $(X_\imath, \mathscr{T}_\imath)$ uzayları verilsin. $\imath \neq \jmath \Rightarrow X_\imath \cap X_\jmath = \emptyset$ olsun. Bu koşulu sağlayan uzaylar ailesine ayrışık (dijoint) uzaylar denir.
$$\mathcal{S} = \cup \mathscr{T}_\imath = \cup \{T \,:\, (\exists \imath \in I)\, T \in \mathscr{T}_\imath\}$$
bileşimi üzerinde $\mathscr{T}$ ailesini şöyle tanımlayalım:
$$U \in \mathscr{T} \Leftrightarrow U \cap X_\imath \in \mathscr{T}_\imath,\ (\imath \in I)$$
$(\mathcal{S}, \mathscr{T})$ bir topolojik uzaydır. Gösteriniz. *(Bu uzaya $(X_\imath, \mathscr{T}_\imath)$ uzaylarının topolojik toplam uzayı* denilir.)

14. Bir X kümesi üzerideki $\mathscr{T}_1$ ve $\mathscr{T}_2$ topolojileri arasında $\mathscr{T}_1 \leq \mathscr{T}_2$ bağıntısı var ise $\mathscr{T}_1' \leq \mathscr{T}_2'$ bağıntısının da olduğunu gösteriniz.