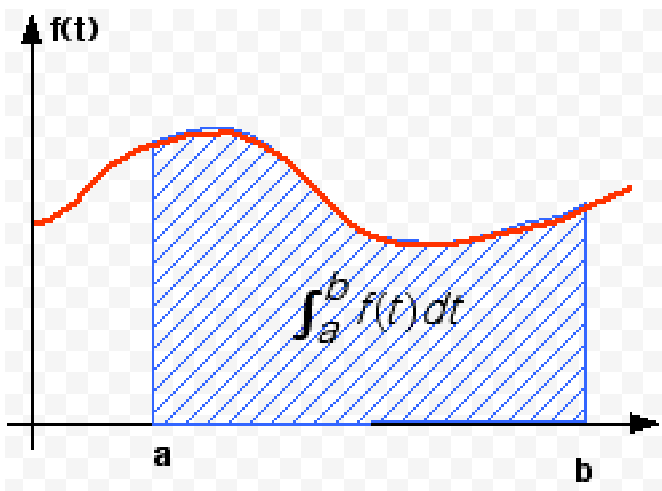
Bölüm 23

Belirli İntegral

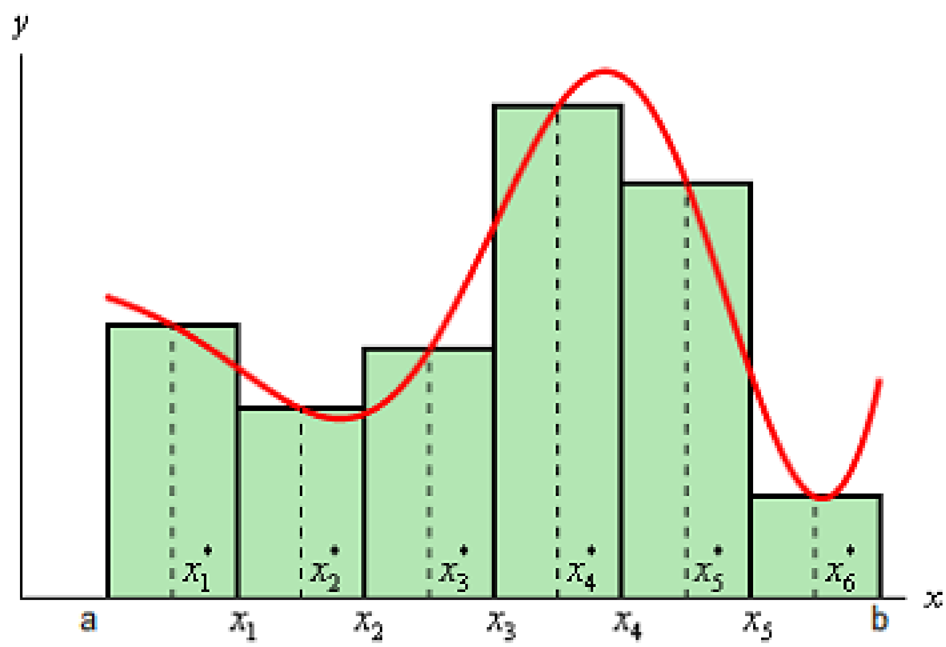


Şekil 23.1: Düzlemsel bölgenin alanı

Düzlemde kare, dikdörtgen, üçgen, çember gibi iyi bilinen geometrik şekillerin alanlarını bulmak için uygun formüller kullanıyoruz. Ama, uygulamada alanını bilmek isteyeceğimiz düzlemsel alanlar, yukarıda sayılan şekillerden hiç birisine benzemeyebilir. Üstelik bunların sayısı bilinen geometrik şekillerden daha çoktur.

Bilimin her alnında olduğu gibi, matematik de kuralları genişletme ve mümkünse genelleştirme peşindedir. Belirli integral bu gereksemeden doğmuştur. İlk genelleşme, bilinen geometrik şekiller yerine, bilinen fonksiyonlarla sınırlanmış düzlemsel bölgelerin alanlarının hesaplanması işidir. Daha sonra çok boyutlu uzaylarda yüzey alanlarını bulmaya genişletilmiştir. Ayrıca, fizikte farklı amaçlarla kullanılmaya başlanmıştır.

Şimdi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunu düşünelim. Ox- ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alanı hesaplamak isteyelim. Genişleme için daima iyi bildiğimiz kavramlara dayanırız. Dikdörtgenin alanını iyi bildiğimize göre, söz konusu dülemsel alanı dikdörtgenlere ayırmaya çalışalım. Tabii, y=f(x) fonksiyonu Ox-eksenine paralel bir doğru değilse, dikdörtgenlerin alanlarının toplamı ancak gerçek alanın yaklqaşık bir değeri olur. Şimdi bunu geometrik olrak açıklayalım:



Şekil 23.2: Eğri altındaki alanın yaklaşık değeri

Önce, f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde pozitif değerler aldığını varsayalım. $[a, b]$ aralığını, eşit olması gerekmeyen alt aralıklara bölelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{23.1}$$

Her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında bir c_i noktası seçelim. $f(c_i) = yi$ diyelim. Ox- ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alan, yaklaşık olarak tabanı $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve yüksekliği $y_i = f(c_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olan dikdörgenlerin alanları toplamına eşittir. Bunu şöyle ifade edelim:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \ldots + y_n \Delta x_n \tag{23.2}$$

(23.1) ifadesine $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü (partition), (23.2) toplamına da bu parçalanışa ait Riemann toplamı denilir. Ayrıntıya girmeden, f nin belirli koşulları sağlaması durumunda, en büyük Δx_i uzunluğu sıfıra yaklaşırken (23.2) toplamının varlığını söyleyeceğiz:

$$\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} s_n = \lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i \tag{23.3}$$

Tabii, $\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0}$ olduğunda alt aralıkların sayısı sonsuz olur ve her bir alt aralığın uzunluğu sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, (23.3) toplamı bir sonsuz serinin toplamına dönüşür.

23.1 İntegral Kuralları

Teorem 23.1. *$f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ise, aşağıdaki bağıntılar vardır:*

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
2. $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, *(k sabit sayı)*
3. $\int_a^b k f(x) dx \int_a^c f(x) dx + \int_c^b g(x) dx, \quad (c \in [a, b])$
4. $\int_a^b k dx = k(b - a)$
5. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx,$
6. $\int_a^a f(x) dx = 0,$
7. $x \in [a, b]$ *ve* m, M *sabit sayılr olmak üzere* $m \leq f(x) \leq M$ *ise*
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$
8. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx, \quad (a < b)$
9. $x \in [a, b]$ *için* $f(x) \geq 0$ *ise* $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
10. $x \in [a, b]$ *için* $g(x) \geq f(x)$ *ise* $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$

23.2 Calculus'un Birinci Temel Teoremleri

Calculus'un 1.Teoremi

Teorem 23.2. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise;*

$F(x)=\int_a^b f(x)dx, \quad x\in[a,b]$

foksiyonu (a,b) aralığında süreklidir, türetilebilir ve

$F'(x)=f(x) \quad x\in(a,b)$

eşitliği sağlanır.

Calculus'un İkinci Temel Teoremi

Teorem 23.3. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, yukarıdaki gösterimler altında,*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \tag{23.4}$$

dır.

Örnek 23.1.

$y=f(x),\ Ox,\ x=a,\ x=b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,

$$\int_a^b f(x)dx \tag{23.5}$$

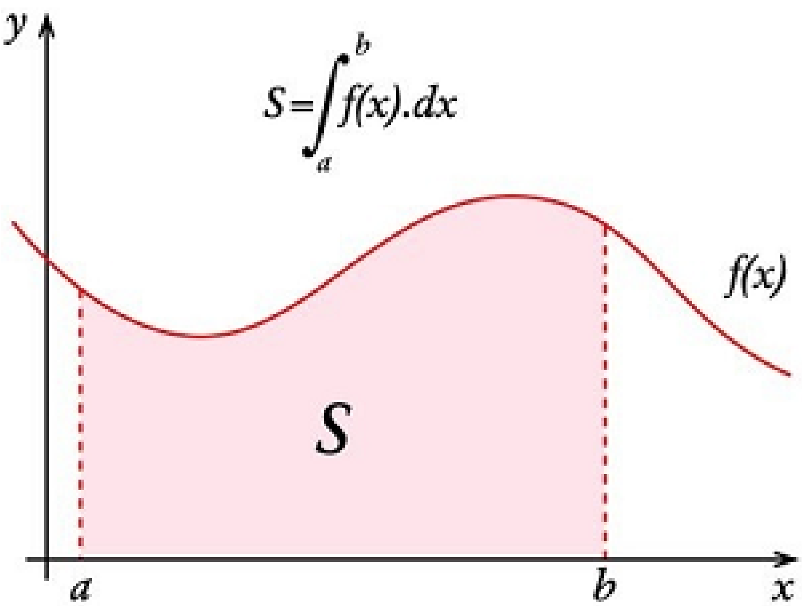
belirli integrline eşittir.

Örnek 23.2.

$y=2x$ eğrsi, Ox doğrusu, $x=1$ ve $x=2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

$$A=\int_1^2 2xdx \tag{23.6}$$
$$= x^2\Big|_1^2 \tag{23.7}$$
$$=2^2-1=3 \tag{23.8}$$

$$A=\frac{2+4}{2}\times 1=2 \tag{23.9}$$



Şekil 23.3: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

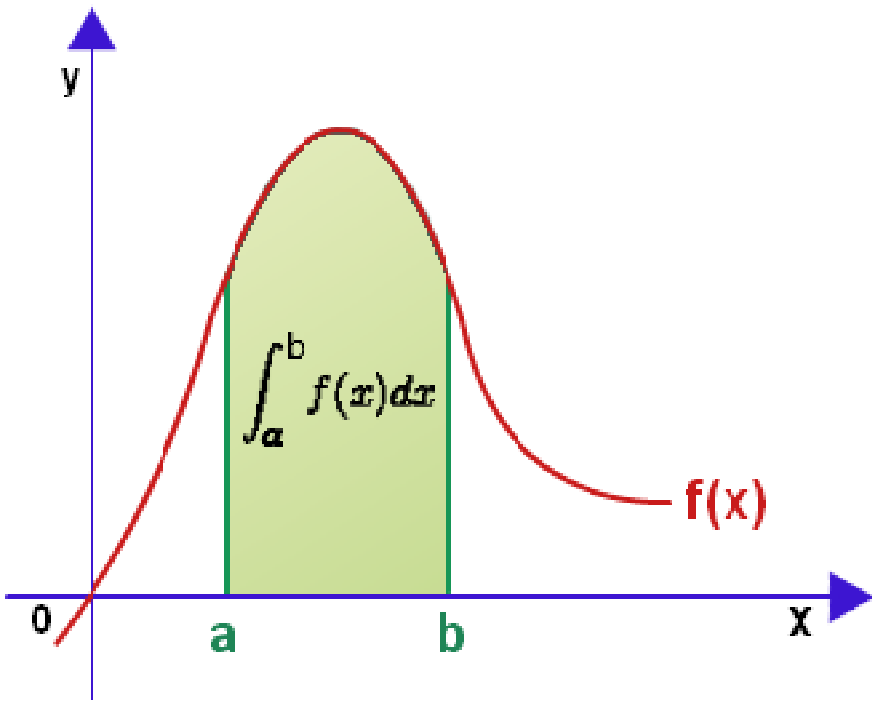
Aynı sonucu, Şekil 23.5'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

Bazı aralıklarda $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (23.2) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır.Negatif alan tanımmlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu eylemi prtik bir formüle bağlamak da mümkündür:

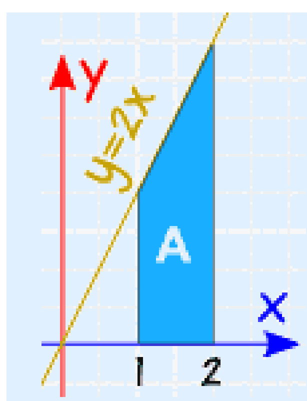
$$A = \int_a^b |f(x)| dx \tag{23.10}$$

Örnek 23.3.

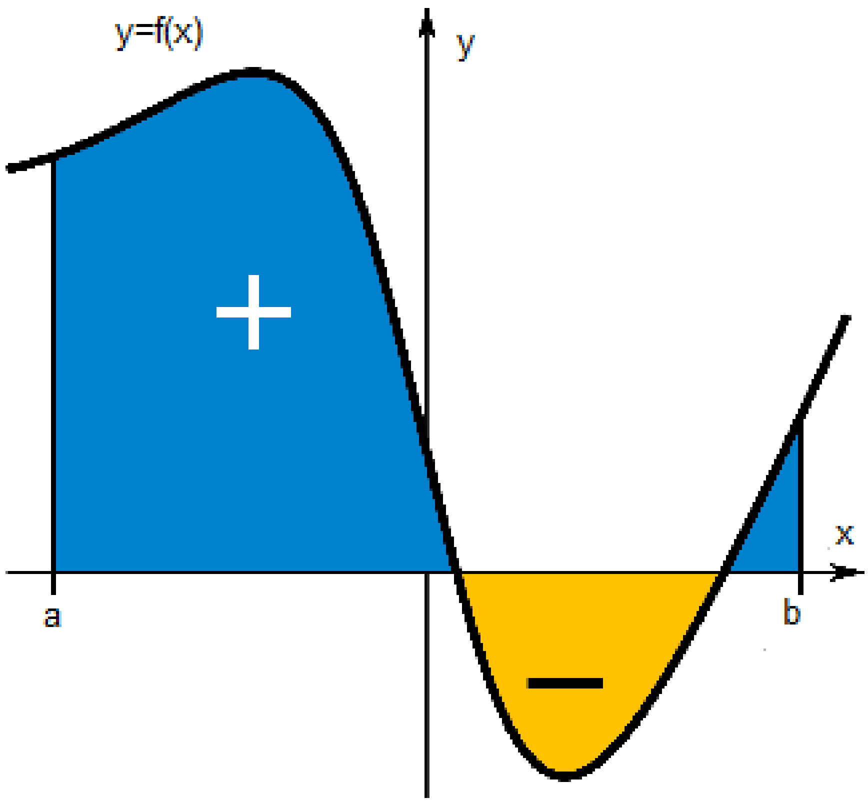
eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ alaığı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y =$



Şekil 23.4: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması



Şekil 23.5: Yamuğun Alanı

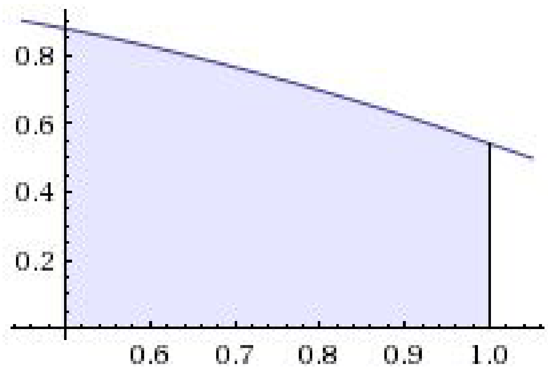


Şekil 23.6: Negatif Alanlar

$\cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$A = \int_{0.5}^{1} \cos x dx = \sin x|_{0.5}^{1} \tag{23.11}$$
$$= \sin(1) - \sin(0.5) \tag{23.12}$$
$$= 0.841 - 0.479 \tag{23.13}$$
$$= 0.362 \tag{23.14}$$

olur.



Şekil 23.7: $y = \cos x$ altındaki Alan

Örnek 23.4.

Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\frac{A}{2} = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = 2\int 3\sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t dt, \quad [x = 3\sin t, \quad dx = 3\cos t dt\ ]$$
$$= \int 3cos^2 t dt$$
$$= \frac{3}{2}\int (1+\cos 2t)\ dt$$
$$= \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}\int \cos 2t\ dt$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^3 \left(\sin^{-1}(\frac{x}{3}) + \frac{x\sqrt{3^2-x^2}}{3^2}\right)\Bigg|_0^3$$
$$= \frac{\pi}{4}3^2 - 3^2\sin^{-1}(\frac{0}{3}) - 0\sqrt{3^2-0^2}$$
$$= \frac{9\pi}{4}$$

olur.

Örnek 23.5.

$[0,2]$ aralığında $y = x^3$ ile $y = 4x+1$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_0^2 [(x^3 - (4x+1)]\,dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - x\Big|_0^2$$
$$= -6$$

olur.

Örnek 23.6.

$[-1,3]$ aralığında $y = x^3+3x+1$ ile $y = 2x-3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{-1}^3 [(x^3+3x+1)-(2x-3)]\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x\Big|_{-1}^3$$
$$= 40$$

olur.

Örnek 23.7.

$[0,1]$ aralığında $y = x^2 - 2x$ ile $y = 0$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_0^1 (x^2-2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{1}\Big|_0^1$$
$$= -\frac{2}{3}$$

olur.

Örnek 23.8.

$[-1,5]$ aralığında $y = 2+2x-x^2$ ile $y = -2x-3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{-1}^5 [(2+2x-x^2)-((-2x-3)]\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\Big|_{-1}^5$$
$$= 36$$

olur.

Örnek 23.9.

$[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ aralığında $y = -3+2x-x^2$ ile $y = -2x-3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [(2+2x-x^2)-((-2x-3))]\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{-3x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x\Big|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$= 13.044$$

olur.

Örnek 23.10.

$[-3,3]$ aralığında $y = -7+2x+3x^2-x^3$ ile $y = -7x+20$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{-3}^{3} [(-7+2x+3x^2-x^3)-((-7x+20)]\,dx = -\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{9x^2}{2} - 27x\Big|_{-3}^{3}$$
$$= -108$$

olur.

Örnek 23.11.

$[1,3/2]$ aralığında $y = 3x^2-5x+3$ ile $y = x^2$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{1}^{\frac{3}{2}} [(3x^2-5x+3)-(x^2)]\,dx = -\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 3x\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{1}{24}$$

olur. Alan negatif olamayacağından, integralin mutlak değeri alınırsa sonuç $\frac{1}{24}$ çıkar.

Örnek 23.12.

$[-3,3]$ aralığında $y = 9-3x^2$ ile $y = 0$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{1}^{\frac{3}{-3}} (9-x^2)\,dx = 9x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3}$$
$$= 36$$

olur. Alan negatif olamayacağından, integralin mutlak değeri alınırsa sonuç $\frac{1}{24}$ çıkar.

Örnek 23.13.

$[4,10]$ aralığında $y = \frac{2x}{x^2+9}$ ile $y=0$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} A = \int_5^{10} \frac{2x}{x^2+9} dx &= \int_{16}^{90} \frac{du}{u}, \qquad [u = x^2+9, \quad du = 2x dx] \\ &= \log u\Big|_{16}^{90} \\ &= \log \frac{90}{16} \\ &= \log 458 \end{aligned}$$

olur.

Örnek 23.14.

$[0,1]$ aralığında $y = 2x - x^2$ ile $y = x^2$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 [(2x-x^2)-x^2] dx = 2\int_0^1 8x - x^2) dx \\ &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 23.15.

$y = x-3$ ile $y = \sqrt{x}$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Fonksiyonları $x = f(y)$ biçiminde yazmak işlemleri kolaylaştıracaktır:

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{1} |(y+3) - y^2| dy = \qquad [x = y+3,\ x = y^2] \\ &= \int_{-1}^{1} (y+3-y^2) dy \\ &= \left(\frac{1}{2}y^2 + 3y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 23.16.

$x = y^2$ ile $x = y + 5$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Fonksiyonları $x = f(y)$ biçiminde yazmak işlemleri kolaylaştıracaktır:

$$A = \int_1^2 |(y+5) - y^2| dy = \qquad [x = y+5,\ x = y^2]$$

$$= \int_1^2 (\frac{y^2}{2} + 5y - (\frac{y^3}{3})$$

$$= \frac{y^2}{2} + 5y - (\frac{y^3}{3})$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}) + (10-5) - \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 4.17$$

olur.

Örnek 23.17.

$y = x^2$ ile $y = x$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_0^1 |(x - x^2| dx = \qquad = \left| \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

olur.

Örnek 23.18.

$y = x^2 + y^2 = 25$ ile $y = 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{-4}^4 |(-3 + 2\sqrt{25 - x^2})| dx$$

$$= 50 \sin^{-1}(\frac{4}{5})$$

$$= 46.3648$$

olur.

Örnek 23.19.

$y = x^2 + y^2 = 25$ ile $x = 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-5}^{5} |(+2\sqrt{25-x^2})|dx &= 25\pi \\
&= 7.53.98
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 23.20.

$y = x^2$ ile $x = 2x + 10$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{3} |2x+10-x^2|dx &= \left(\frac{2}{2}x+3+10x-\frac{1}{3}(x^3)\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= 9+30-\frac{27}{3}-(4-20+\frac{8}{3} \\
&= (9+30-9)-(4-20+\frac{8}{3}) \\
&= 30-(-16+2.67) \qquad = 30-(13.33) = 43.33
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 23.21.

$y = 4x^2$ ile $y = \frac{x+2}{7}$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{0.5}^{2} |\frac{x+2}{7}-4x^2|dx &= \frac{1}{7}\int_{0.5}^{2} x+2-4\int_{0.5}^{2} x^2 dx \\
&= \frac{1}{7}\left(\frac{x^2}{2}+2x-4\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0.5}^{2} \\
&= \frac{1}{7}(2+4-0.125+1)-4\left(\frac{8}{3}-\frac{0.125}{3}\right) \\
&= \frac{1}{7}(6-1.125)-4(2.67-0.04) \\
&= \frac{1}{7}(4.875])-4(2.63) \\
&= 9.82
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 23.22.

$y = x(x-1)(x-2)$ ile Ox ekseni arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Grafiği çizersek, istenen alanın $[0,1]$ aralığında pozitif $[1,2]$ aralığında negatif olduğunu görebiliriz. Ohalde toplam alan şöyle olacaktır:

Pozitif alan,

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx &= \left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right|_0^1 \\ &= \left. \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - 1 + 1 - (0) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

olur.

Negatif alan,

$$\begin{aligned} B = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx &= \left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right|_1^2 \\ &= \left. \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right|_1^2 \\ &= (\frac{16}{4} - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1) \\ &= 0 - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

olur.

Toplam alan

$$A = A + |B| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \tag{23.15}$$

olur.

Örnek 23.23.

$y = x(x-3)$ ile Ox ekseni arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Grafiği çizersek, istenen alanın $[0,3]$ aralığında negatif $[3,25]$ aralığında negatif olduğunu görebiliriz. Ohalde toplam alan şöyle olacaktır:

Negatif alan,

$$\begin{aligned}
A = \int_0^3 (x^2-3x)\,dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^2}{2}\Big|_0^3 \\
&= (\frac{27}{3} - \frac{3\times 9}{2}) - (\frac{0}{3} - \frac{3\times 0}{2})\Big|_0^3 \\
&= (9 - \frac{27}{2}) - (0) \\
&= -4 - \frac{1}{2} \\
&= -4.5
\end{aligned}$$

olur.

Pozitif alan,

$$\begin{aligned}
B = \int_3^5 (x^2-3x)\,dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^2}{2}\Big|_3^5 \\
&= (\frac{125}{3} - \frac{3\times 25}{2}) - (\frac{27}{3} - \frac{3\times 9}{2})\Big|_0^3 \\
&= (41 + \frac{2}{3} - 37 - \frac{1}{2}) - (9 - 13.5) \\
&= 8 + \frac{2}{3} \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}$$

olur.

Toplam alan

$$A = |A| + B = 4.5 + \frac{26}{3} = 13 + \frac{2}{3} \tag{23.16}$$

olur.

Örnek 23.24.

$y = x^2 + x + 4$ ile Ox ekseni arasında ve $[1,3]$ aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} A = \int_1^3 (x^2 + x + 4)dx &= \frac{x^3}{3}\frac{x^2}{2} + 4x\Big|_1^3 \\ &= (\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 12) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4) \\ &= \frac{51}{2} - \frac{29}{6} \\ &= \frac{62}{3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 23.25.

$y = x(3 - x)$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Parabol ile doğrunun kesişim noktalarının apsisleri $x = 0$ ile $x = 2$ dir. İstenen alan pozitif bölgededir. O bölgede $x(3 - x) \geq x$ dir. Ohalde

$$\begin{aligned} A = \int_0^2 (x(3 - x)) - (x)dx &= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \\ &= (6 - \frac{8}{3} - 0 - (2 - 0) \\ &= \frac{10}{3} - 2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 23.26.

$y = \sin x$ eğrisi ile $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

$y = \sin x$ eğrisi ile doğrunun kesişim noktalarının apsisleri $x = \frac{\pi}{4}$ ile $x = \frac{3\pi}{4}$ dür. İstenen alan pozitif bölgededir. O bölgede $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ dir. Ohalde eğri altında kalan alan

$$
\begin{aligned}
A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x dx = \; & \cos x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= \left[\cos(\frac{3\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4})\right] \\
&= \left[-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

olur.

Bundan doğru altında kalan alanı çıkarmalıyız. Doğru altında kalan alan

$$
\begin{aligned}
B &= \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

dir. Öyleyse istenen alan

$$
\begin{aligned}
C &= A - B \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{4-\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

olur.

Örnek 23.27.

$y = 3x^2 - 5x + 3$ ile $y = -x^2$ eğrilei arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Birinci parabolun kökleri yoktur;öyleyse Ox eksenini kesmez. Baş katsayı pozitif olduğundan parabol üst yarı düzlemdedir. İkinci parabol başlangıç noktasından geçer ama eğri alt yarı düzlemdedir. Dolayısıyla bu iki eğri kesişmez ve ortak bir düzlemsel alan belirlemez. Bu durumda sorunun yanıtı $Alan = 0$ olacaktır.

Ama istersek, belirli integrak formülünü uygulayabiliriz. İntegral sınırları için $3x^2 - 5x + 3 - x^2 = 0$ denkleminin köklerini alırsak,

$$A = \int_1^{1.5} [(3x^2 - 5x + 3) - x^2]\,dx = \frac{2x^3}{3}\frac{5x^2}{2} + 3x\Big|_1^{1.5}$$
$$= -\frac{1}{24}$$

çıkar. Ancak bu sonucun problemde istenen alan değil, $3x^2 - 5x + 3) - x^2 = 0$ eğrisi ile Ox ekseni arasında kalan alan olduğunu bilmeliyiz.

Örnek 23.28.

Aşağıdaki belirli integrali bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-2}^{2} [(7 + 3x - 2x^2 - x^3) - (-x - 1)]\,dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 6x\Big|_{-2}^{2}$$
$$= -\frac{104}{3}$$

çıkar.

Örnek 23.29.

Aşağıdaki belirli integrali bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-3}^{3} [(7 + 2x - 3x^2 - x^3) - (-7x + 20)]\,dx = -\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{9x^2}{2} - 27x\Big|_{-3}^{3}$$
$$= -108$$

çıkar.

Örnek 23.30.

Aşağıdaki belirli integrali bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-1}^{1} [(x^3 - x^2 - 4x) - (-3x - 1)]\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\Big|_{-1}^{1}$$
$$= \frac{4}{3} \approx 1.3333$$

çıkar.

Örnek 23.31.

$y = (3-2x-x^2)-(x-5)$ eğrisi ile Ox ekseni arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$(3-2x-x^2)-(x-5)=0$ denkleminin kökleri $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ olduğundan istenen alan,

$$A = \int_{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} [(3-2x-x^2)-(x-5)]dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 8x\Big|_{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$$
$$= \frac{35\sqrt{5}}{6} \approx 13.044$$

çıkar.

Örnek 23.32.

$y = (x^3-(4x+1))$ eğrisi ile Ox ekseni arasında ve [0,2] aralığı üzerinke kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$(x^3-(4x+1)=0$ denkleminin kökleri $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ olduğundan istenen alan,

$$A = \int_0^2 [((x^3-(4x+1)]dx = -\frac{x^4}{4} - 2x^2 - x\Big|_0^2$$
$$= -6$$

çıkar.

Örnek 23.33.

$y = (8x - x^2 - 2x)$ parabolü ile $y = 0$ ekseni arasında ve [0,8] aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_0^8 [8x - x^2 - 2x]dx = -\frac{x^3}{3}\frac{6x^2}{2}\Big|_0^2$$
$$= \frac{64}{3} \approx 21.333$$

çıkar.

Örnek 23.34.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız. bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-1}^{5} [2+2x-x^3]\,dx = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 5x \Big|_{-1}^{5}$$
$$= -78$$

çıkar.

Örnek 23.35.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız. bulunuz.

Çözüm:

$$I = \int_{-1}^{5} [2+2x-x^3]\,dx = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 5x \Big|_{-1}^{5}$$
$$= -78$$

çıkar.

Örnek 23.36.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız. bulunuz.

Çözüm:

$$I = \int_{0}^{3} [(x^2+3x-4)-(x^2-2x+1)]\,dx = 5\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{0}^{3}$$
$$= \frac{15}{2} \qquad = 7.5$$

çıkar.

Örnek 23.37.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız. bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} I = \int_0^2 [(x^3 - (4x+1))]\, dx &= \frac{x^4}{4} - 2x^2 - x \Big|_0^2 \\ &= -6 \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 23.38.

$y^2 = 4ax$ parabolü ile $x^2 = 4ay$ parabolü arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} A = \int_0^{4a} \left[2\sqrt{a}\, x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{4a}\right] dx &= \left(2\sqrt{a}\, \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12a}\right)\Bigg|_0^{4a} \\ &= \frac{4\sqrt{a}}{3}(4a)^{\frac{3}{2}} - \frac{64a^3}{12a} \\ &= \frac{32a^2}{3} - \frac{64a^2}{12} \\ &= \frac{128a^2 - 64a^2}{12} \\ &= \frac{16a^2}{3} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 23.39.

$y = 2x + 10$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolü arasında ve [-2,3] aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{3} [2x + 10 - x^2]\, dx &= \left(\frac{2x^2}{2} + 10x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= (x^2 + 10x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{3} \\
&= (9 + 30 - \frac{27}{3}) - (4 - 20 + \frac{8}{3}) \\
&= (9 + 30 - 9) - (4 - 20 + 2.67) \\
&= 30 - (-16 + 2.67) \\
&= 30 - (-13.33) \\
&= 43.33
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 23.40.

$y = 2x + 10$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolü arasında ve [-2,3] aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{3} [2x + 10 - x^2]\, dx &= \left(\frac{2x^2}{2} + 10x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= (x^2 + 10x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{3} \\
&= (9 + 30 - \frac{27}{3}) - (4 - 20 + \frac{8}{3}) \\
&= (9 + 30 - 9) - (4 - 20 + 2.67) \\
&= 30 - (-16 + 2.67) \\
&= 30 - (-13.33) \\
&= 43.33
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 23.41.

$y = \frac{x+2}{7}$ doğrusu ile $y = 4x^2$ parabolü arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
A = \int_{0.5}^{2} \left[\frac{x+2}{7} - 4x^2 \right] dx &= \frac{1}{7} \left[(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{4}{3}x^3 \right] \Big|_{0.5}^{2} \\
&= \frac{1}{7} [2+4-(0.125+1)] - 4 \left[\frac{8}{3} - \frac{0.125}{3} \right] \\
&= \frac{1}{7}(6-1.125) - 4(2.67-004) \\
&= \frac{1}{7}(4.875) - 4(2.63) \\
&= -9.82
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 23.42.

$x = y^2$ parabolü ile $x = y + 5$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Bu sorunun çözümü için koordinat eksenlerinin rollerini değiştirmek kolaylık sağlayacaktır.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{1}^{2} [y + 5 - y^2] \, dy &= \left[(\frac{y^2}{2} + 5y - (\frac{1}{3}y^3) \right] \Big|_{1}^{2} \\
&= \left(2 - \frac{1}{2} \right) + (10-5) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) \\
&= 4.17
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 23.43.

$y = x^2$ parabolü ile $y = \sqrt{x}$ prabolü arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Eğriler$x = 0$ ile $x = 1$ noktalarında keişir.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{0}^{1} [\sqrt{x} - x^2] \, dx &= \left[(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{3}x^3) \right] \Big|_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 23.44.

$y = 2x^2$ parabolü ile $y = 4x + 16$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz. *Çözüm:*

Eğriler$x = -1$ ile $x = 3$ noktalarında keişir.

$$A = \int_{-1}^{3} \left[(4x + 16 - (2x^2 + 10)\right] dx = \int_{-1}^{3} \left[-2x^2 + 4x + 6\right] dx \quad = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x\right)\Big|_{-1}^{3}$$
$$= \frac{64}{3}$$

çıkar.

Örnek 23.45.

$y = \sin x$ ile $y = \cos x,\ y = 0,\ x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Eğriler $x = \frac{\pi}{4}$ noktasında kesişirler. $[0, \frac{\pi}{4}]$ aralığında $\cos x \geq \sin x$ ve $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\sin x \geq \cos x$ olduğundan, alan,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \sin x]\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - \cos x]\, dx \\
&= (\sin x + \cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sqrt{2} - 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) \\
&= 2\sqrt{2} - 2 \approx 0.828427
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 23.46.

$x = \frac{1}{2}y^2 - 3$ ile $y = x - 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Bu sorunun çözümü için koordinat eksenlerinin rollerini değiştirmek kolaylık sağlayacaktır.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\frac{1}{2} y^2 - 3 \right) \right] dy \\
&= \int_{-2}^{4} \left[-\frac{1}{2} y^2 + y + 4 \right] dy \\
&= \left(\frac{1}{6} y^3 + \frac{1}{2} y^2 + 4y \right) \Bigg|_{-2}^{4} \\
&= 18
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 23.47.

$x = -y^2 + 10$ ile $x = (y-2)^2$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Bu sorunun çözümü için koordinat eksenlerinin rollerini değiştirmek kolaylık sağlayacaktır.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{3} \left[-y^2 + 10 - (y-2)^2 \right] dy \\
&= \int_{-1}^{3} \left[-2y^2 + 4y + 6 \right] dy \\
&= \left(-\frac{2}{3} y^3 + 2y^2 + 6y \right) \Bigg|_{-1}^{3} \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

çıkar.

Dizin