

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

1	<i>Analiz Öğretimi</i>	3
1.1	İki Milenyum Süren Sorunlar	21
1.2	Mantık ve Matematik	25
1.2.1	Tümdengelim	26
1.2.2	Tümevarım	27
1.3	Matematik Dili	30
I	Ön Bilgiler	31
2	<i>Ön Bilgiler (Pre Kalkülüs)</i>	3
2.1	Ön Kalkulus	33
3	<i>Önermeler Cebiri</i>	3
3.1	İki-değerli Mantık	35
3.2	Matematiksel Mantık	35
3.3	Boole Cebiri	36
3.4	Önermeler	36
3.4.1	Yalın Önermeler	37
3.4.2	Bileşik Önermeler	38
3.4.3	Denk Önermeler	38
3.5	Önermeler Cebiri	39
3.6	Operatörler	39
3.6.1	\wedge Operatörü	39
3.6.2	\vee Operatörü	40
3.7	Değilleme	40
3.7.1	Bir Önermenin Değili	40
3.7.2	İse Bağlacı	41
3.7.3	Koşullu Önerme Sonuçları	42
3.8	\vee Operatörünün Özellikleri	43
3.8.1	\vee 'nin Eşgüçlülüğü	43
3.8.2	\vee 'nin Yer Değişim Özeliği	43
3.8.3	\vee 'nin Birleşimi	43
3.9	Dağılma	44
3.10	Bileşik Önermelerin Değillenmesi	44
3.10.1	De Morgan Kuralları	44
3.11	\Leftrightarrow : Ancak ve Ancak Operatörü	45

3.12 Hepdoğru ve Hepyanlış	46
3.12.1 Karşıt Ters	49
3.12.2 Alıştırmalar	49
3.12.3 Alıştırmalar	54

4 Kümeler Cebiri 4

4.1 Kümeler Cebiri	55
4.1.1 Kapsama	55
4.1.2 Evrensel Küme	56
4.2 Venn Çizenekleri	56
4.2.1 Tümleyen Küme	56
4.2.2 Boş Küme	56
4.2.3 Tek geli küme	56
4.2.4 Eşit Kümeler	57
4.2.5 Has Alt Küme	57
4.2.6 Kuvvet Kümesi	57
4.2.7 Simetrik Fark	57
4.3 Bağıntılar	57
4.3.1 Kartezyen Çarpım	58
4.3.2 Grafik	58
4.3.3 Kartezyen Çarpımın zelikleri	59
4.4 Analitik Düzlem	59
4.5 Bağıntılar	59
4.5.1 Bağıntıların Gösterimi	59
4.5.2 Grafik	60
4.6 Bağıntı Türleri	60
4.7 Denklik Bağıntıları	60
4.7.1 Eşitlik	60
4.8 Denklik Bağıntısı Nedir?	61
4.8.1 Denk ğeler	61
4.9 Denklik Sınıfları	61
4.10 Ters Bağıntı	62
4.11 Simetrik Bağıntı	62

5 Sayılar 4

5.1 Sayıların Kuruluşu	65
5.2 Sayıların Sıralanması	66
5.3 Doğal Sayılar	67
5.4 Doğal Sayıların Kuruluşu	67
5.5 Peano Belitleri	67
5.6 Sonlu Tme Varım İlkesi	67
5.7 Nicelik Sayıları	67
5.8 Eşgçllk	68
5.9 Sayılabilirlik	69
5.10 Sayılamayan Sonsuz Kümeler	69
5.11 Gerçel Sayıların Tamlığı	70
5.12 Alıştırmalar	70

6 Rasyonel Üslü İfadeler 4

6.1	Tamsayı Üsler	71
6.1.1	Üslü İfadelerin Özellikleri:	71
6.1.2	Negatif Üsler	72
6.1.3	Benzer Üslü İfadeler	72
6.2	Rasyonel Kuvvetler	72
6.3	Üslü Denklemler	74
6.4	Alişturmalar	74
6.5	Üslü Denklemler	75
6.6	Alişturmalar	75
6.7	Köklü İfadeler	75
6.8	Alişturmalar	78
6.9	e Sayısı	78
6.10	Analitik Geometri	80
6.11	n-sıralılar	80
6.12	Kartezyen Çarpım	81
6.12.1	İkili ve Çoklu sıralılar	81
6.12.2	n-sıralılar	82
6.13	Analitik Geometri	82
6.14	Kartezyen Çarpımın Genelleşmesi	83
6.15	ALİŞTIRMALAR	83

7 Denklemler 5

7.1	Doğru denklemleri	87
7.1.1	İki noktası bilinen doğru Denklemi:	87
7.1.2	Bir noktası ve eğimi bilinen doğru Denklemi:	88
7.2	Doğrunun Genel Denklemi	88
7.2.1	İkinci Dereceden Denklemler	88
7.2.2	$ax^2 = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3	$ax^2 + bx = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3.1	$ax^2 + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3.2	$ax^2 + bx + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	90
7.4	Değişken değiştirme	92
7.5	Köklü denklemler	92
7.6	Mutlak Değer	93
7.7	Alişturmalar	94
7.8	Köklerle Katsayılar Arasındaki Bağlılıklar	94
7.8.1	Köklerin Toplamı:	95
7.8.2	Köklerin Çarpımı:	95
7.8.3	Köklerin Farkının Mutlak Değeri:	95
7.9	Alişturmalar	95
7.10	İkinci Dereceden Denklemlerin İncelenmesi	96
7.11	Denklemler Sistemleri	97
7.12	Eşitsizlikler	97
7.13	Eşitsizlik Sistemleri	100
7.14	Alişturmalar	100
7.15	İkinci Dereceden Fonksiyonlar	101
7.16	Parabol Çizimi	103

7.17 Alıştırmalar	105
7.18 Eşitsizlik Sistemlerinin Grafikle Çözümü	105
7.19 Örnekler:	105
7.20 Doğrusal denklem sistemleri	107

8 Parametrik denklemler 6

8.1 Eğrinin yönü	109
8.2 kapalı Eğri	109
8.3 Çember'in Parametrik Denklemleri	109
8.4 Elips'in Parametrik Denklemleri	110
8.5 Cycloid	111

9 Matrisler 6

9.1 Matrisler	113
9.1.1 Satır ve Kolon	113
9.2 Matrisin Bileşenleri	114
9.3 Matris İşlemleri	114
9.3.1 Matrislerin Toplamı	114
9.3.2 Matrislerde Çıkarma	115
9.3.3 Matrisin Sayı ile Çarpımı	115
9.3.4 Matrislerin Çarpımı	116
9.3.5 Çarpımın Sırası Değişemez	117
9.3.6 İki den çok matrisin Çarpımı	117
9.3.7 Matrisin Devriği (transpose)	117
9.4 Matrislerin Çarpımının Devriği	118
9.4.1 Matrislerde Bölme	118
9.5 Matris Türleri	119
9.5.1 Kare Matris	119
9.5.2 Sıfır Matris	119
9.5.3 Kare Matrisin Köşegenleri	119
9.5.4 Kare Matrisin Kuvveti	119
9.5.5 Birim Matris	119
9.5.6 Simetrik Matris	120
9.5.7 Anti Simetrik Matris	120
9.5.8 Ters Matris	121
9.5.9 Üçgensel Matris	121
9.5.10 Matrisin İzi (trace)	121
9.6 Örnekler	122
9.7 Matrisin Uzunluğu (size)	122
9.8 Determinantlar	123
9.9 Determinant Nedir?	123
9.9.1 1×1 Matrislerin determinanı	123
9.9.2 2×2 Matrislerinin determinanı	123
9.9.3 3×3 Matrislerinin determinanı	124
9.9.4 Sarrus Yöntemi	124
9.10 Başka Yöntemler	125
9.10.1 Yüksek Boyutlu Matrislerin Determinantları	125
9.11 Laplace Yöntemi	125

9.11.1 Minör	125
9.12 Eşçarpan (cofactor)	126
9.13 Determinant için Laplace Açılımı	127
9.14 Determinantların Özellikleri	128
9.14.1 Sarrus Yöntemiyle Hesap:	130
9.14.2 Laplace Yöntemiyle Hesap:	130
9.14.3 Gauss Eleme Yöntemi	130
9.15 Ters Matris	131
9.16 Matrisler Üzerinde İlkel Satır İşlemleri	131
9.17 Gauss Eleme Yöntemi ile Ters Matrisi Bulma	132
9.18 Eklı Matris	133
9.19 Eşçarpan İle Matrisin tersini Bulma	134
9.20 Doğrual Denklem Sistemleri	137
9.21 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	138
9.22 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	140
9.23 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	141

10 Doğrual Denklem Sistemleri 7

10.0.1 Sonsuz Çözüm	144
10.0.2 Tek çözüm	144
10.0.3 Matrislerle Çözüm	145
10.1 Denk Sistemler	146
10.2 İndirgenmiş Satır Eşolon Biçimi	147
10.3 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	148
10.4 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	150
10.5 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	151
10.5.1 İki Bilinmeyen için Cramer Formülü	151
10.5.2 Üç Bilinmeyen için Cramer Formülü	153
10.6 Alıştırılmalar	154

11 Polinomlar 7

11.1 Bir Belirsizli Polinomlar	155
11.2 Çok Belirsizli Polinomlar	157
11.3 Terimleri Kuvvetlerine Göre Sıralama	158
11.4 İki Polinomun Eşitliği	158
11.5 Uygulamalar	159
11.6 Polinomlar Kümesi Üzerinde İşlemler	160
11.7 Toplama	160
11.8 Uygulamalar	162
11.9 Çıkarma	163
11.10 Uygulamalar	164
11.11 Çarpma	164
11.12 Sayıl (skalerle) Çarpma	167
11.13 Uygulamalar	168
11.14 Başlıca Özdeşlikler	168
11.14.1 İki Terim Toplamının Karesi	168
11.14.2 İki Terimin Farkının Karesi	169
11.14.3 İki Terimin Toplamı İle Farkının Çarpımı	169

11.14.4Üç Terim Toplamının Karesi	170
11.14.5İki Terim Toplamının Küpü	171
11.14.6İki Terim Farkının Küpü	172
11.14.7İki Küp Toplamı	172
11.15İki Teriminin Kuvvetleri	174
11.16Alıştırmalar	177
11.17Polinomlarda Bölme	178
11.18Uygulamalar	183
11.19Bölme Algoritması	184
11.20Çarpan Teoremi	185
11.21Uygulamalar	187
11.22Uygulamalar	188
11.23Horner Yöntemi ile Bölme	189
11.24Bir Polinomun $(x - a)(x - b)$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalan	190
11.25Uygulamalar	193
11.26Alıştırmalar	195
11.27Polinomların Çarpanlara Ayrılması	197
11.28Karmaşıkları Basite İndirmek!	197
11.29ebob, ekok	198
11.30Cebirsel İfadeleri Çarpanlara	200
11.30.1Ortak Çarpan Parantezine Alma	201
11.31Uygulamalar	201
11.32Uygulamalar	203
11.33Özdeşlikler	203
11.34Uygulamalar	204
11.35Uygulamalar	206
11.36Özdeşlikleri Kullanma	206
11.37Uygulamalar	207
11.38Uygulamalar	209
11.39Uygulamalar	211
11.40Alıştırmalar	214
11.41Başlıca Özdeşlikler	215

12 Fonksiyonlar 8

12.1 Foksiyonun Grafiği	218
12.2 Tek Değerli Fonksiyonlar	219
12.3 Alıştırmalar	219
12.4 Fonksiyon Türleri	221
12.4.1 Eşit Foksiyonalar	221
12.4.2 İçine Fonksiyon	221
12.4.3 Örtün Fonksiyon	221
12.4.4 Bire Bir Fonksiyon	222
12.4.5 Bire Bir İçine Fonksiyon	222
12.4.6 Bire Bir Örtün Fonksiyon	222
12.4.7 Sabit Fonksiyon	222
12.4.8 Sıfır Fonksiyon	222
12.4.9 Özdeşlik Fonksiyonu	222

12.5 Kapalı Fonksiyon	223
12.6 Örnekler	223
12.7 Alıştırmalar	224
12.8 Fonksiyonların Bileşkesi	225
12.9 Bileşke İşleminin Özellikleri	227
12.9.1 Yer Değişim Özeliği Yoktur	227
12.9.2 Birleşme Özeliği	228
12.10 Ters Fonksiyon	228
12.11 Ters Fonksiyonun Grafiği	229

13 Rasyonel İfadeler 9

13.1 Alıştırmalar	231
13.2 Rasyonel İfadelerin Toplamı	231
13.3 Rasyonel İfadelerin Çarpımı	232
13.4 Rasyonel İfadelerde Bölme	233
13.5 Polinom Denklemler	233
13.6 Birinci Dereceden Polinom Denklemlerin Çözümü	233

14 Kombinasyon Ve Permütasyon 9

14.0.1 Kombinasyon (Combination)	235
14.1 Permütasyon (permutation)	235
14.2 Combinatorics	236
14.2.1 Kombinatorik'in temel formülü	237
14.3 Sayma	237

15 Pascal Üçgeni 9

16 Ön Trigonometri 9

16.1 Yönlü Açılar	245
16.2 Yönlü yaylar	245
16.3 Birim Çember	246
16.4 Açı Ölçü Birimleri	246
16.4.1 Derece	246
16.4.2 Grad	247
16.4.3 Radyan	247
16.5 Trigonometrik Fonksiyonlar	247
16.5.1 Simetrik Açılar	250
16.5.2 Simetrikler	250
16.6 Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri	251
16.7 Özel Açılar	251
16.8 Trigonometrik Fonksiyonları Grafikleri	252
16.8.1 Cosinus Grafiği	252
16.8.2 Sinus grafiği	253
16.8.3 Tanjant Grafiği	254
16.9 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	255
16.9.1 Arcsinus Fonksiyonu	255
16.9.2 ArcCosinus Fonksiyonu	256

16.9.3 Arctanjant Fonksiyonu	256
16.9.4 Arccotanjant Fonksiyonu	257
16.10 Örnekler	257
16.11 Periyodik Fonksiyonlar	258
16.12 Alıştırmalar	259
16.13 Limit	260
16.14 Fonksiyonun Limiti	260
16.15 Soldan ve Sağdan Yaklaşım	260
16.15.1 Soldan Limit	260
16.15.2 Sağdan Limit	260
16.15.3 Limit	261
16.16 Üç Noktalarda Limit	261
16.17 Karl Weierstrass'ın Tanımı	262
16.18 Örnekler:	262
16.19 Limit Kuralları	263
16.20 Belirsiz Biçimler	265
16.20.1 Sonsuzdaki Limit	266
16.21 Çözümlü Örnekler	266
16.22 Rasyonel Fonksiyonlarda Limit	270
16.22.1 Sonsuzda Limitin Olmadığı Durum	271
16.22.2 Köklü İfadelerin Sonsuzdaki Limiti	271
16.23 Çözümlü Prolemler	274

26 *Integral Alma Yöntemleri* 10

27 *Belirsiz İntegral* 10

27.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri	305
27.1 Değişken Değiştirme	305
27.2 Trigonometrik İntegraller	307
27.3 Ters Trigonometrik Konumlar	309
27.4 Çözümlü Problemler	310
27.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	316
27.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	316
27.5.2 Basit Kesirlere ayırma	317
27.5.3 Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa	320
27.6 Karma problemler	323
27.7 Alıştırmalar	331
27.8 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	331
27.9 Sürekli Fonksiyonların İntegrali	332
27.10 Değişken Değiştirme	333
27.11 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	336
27.12 Kısmi İntegrasyon	339
27.13 Polinomların Çarpanlara Ayrılması	342
27.14 Basit Kesirlere Ayırma	345
27.15 Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi	345
27.16 Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması	349
27.17 Rasyonelleştirme	351
27.18 Köklü İfadelerin İntegrali	352

27.19 İndirgenme Yöntemleri	358
27.20 Bazı İndirgeme Formülleri	360
27.21 Bağlantılı Oranlar	361

28 Belirsiz İntegral 11

28.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri	363
28.1 Değişken Değişirme	363
28.2 Trigonometrik İntegraller	365
28.3 Ters Trigonometrik Konumlar	367
28.4 Çözümlü Problemler	368
28.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	374
28.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	374
28.5.2 Basit Kesirlere ayırma	375
28.5.3 Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa	378
28.6 Belirli İntegral	386
28.7 Belirsiz İntegral Kuralları	387
28.8 Calculus'un Birinci Temel Teoremleri	388
28.8.1 Calculus'un 1. Teoremi	388
28.8.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi	388
28.9 Belirsiz İntegral	391
28.9.1 Belirsiz İntegral Formülleri	391
28.10 Alan Hesabı	391
28.11 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	391

29 İntegral 11

29.1 İntegral Kavramı ve Tanımı	395
29.1.1 Belirli İntegral	395
29.2 Belirli İntegral Kuralları	397
29.3 Calculus'un Temel Teoremleri	401
29.3.1 Calculus'un 1. Temel Teoremi	401
29.3.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi	402
29.4 Belirsiz İntegral	404
29.4.1 Belirsiz İntegral Formülleri	404
29.5 Değişken Değişirme	404
29.6 Trigonometrik İntegraller	406
29.7 Ters Trigonometrik Konumlar	408
29.8 Çözümlü Problemler	409
29.9 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	415
29.9.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	415
29.9.2 Basit Kesirlere ayırma	416
29.9.3 Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa	419
29.10 Alıştırmalar	422
29.11 Belirli İntegral Kuralları	427
29.12 Sayısal İntegraller	431
29.13 Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu	431

30 *Integral Alma teknikleri* 11

30.1 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	435
30.2 İntegral Alma Yöntemleri	436
30.3 Değişken Değiştirme	437
30.4 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	440
30.5 Kısmi İntegrasyon	443
30.6 Logaritmik integraller	447
30.7 Köklü İfadelerin İntegrali	448

31 *Integral Alma teknikleri* 12

31.1 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	455
31.2 İntegral Alma Yöntemleri	456
31.3 $\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller	457
31.4 İndirgenme Yöntemleri	464
31.5 Bazı İndirgeme Formülleri	466
31.6 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	467
31.7 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	468
31.7.1 Arcsinus Fonksiyonu	468
31.7.2 ArcCosinus Fonksiyonu	469
31.7.3 Arctanjant Fonksiyonu	469
31.7.4 Arccotanjant Fonksiyonu	470
31.8 Örnekler	472
31.9 $\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller	472
31.10 Logaritmik integraller	478
31.11 Dönel Cisimleri Hacimleri	479
31.12 Silindirik Kabuklar Yöntemi	480
31.13 Dilimleme Yöntemiyle Hacim Bulma	482
31.14 Örnek Hacim Hesapları	483

32 *Doğal Logaritma Fonksiyonu* 12

32.1 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Tanımı	488
32.2 Tanım bölgesini Genişletme	488
32.3 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri	489
32.4 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	490
32.5 Logaritmik Türev	490
32.6 Logaritmik Türevin İntegrali	490
32.7 Üstel Fonksiyon	491
32.8 a tabanlı Üstel Fonksiyon	491
32.9 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Davranışı	492
32.10a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Türevi	493
32.11a Tabanlı Üstel Fonksiyonun İntegrali	493
32.12a Tabanına Göre Logaritma	493
32.13 $\log_a x$ fonksiyonunun özellikleri	493
32.14 $\log_a x$ fonksiyonunun Türevi	493
32.15 Çözümlü Problemler	494

25 *Integral Alma Yöntemleri* 12

25.1 Belirsiz İntegral	511
25.2 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	511
25.3 Sürekli Fonksiyonların İntegrali	512
25.4 Değişken Değişirme	513
25.5 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	516
25.6 Kısmi İntegrasyon	519
25.7 Polinomların Çarpanlara Ayrılması	522
25.8 Basit Kesirlere Ayırma	525
25.9 Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi	525
25.10 Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması	529
25.11 Rasyonelleştirme	531
25.12 Köklü İfadelerin İntegrali	532
25.13 Alıştırmalar	538
25.14 İndirgenme Yöntemleri	538
25.15 Bazı İndirgeme Formülleri	540
25.16 Bağlantılı Oranlar	541

26 *Kutupsal Koordinatlar* 13

26.1 Kutupsal Koordinatlarda Grafik	545
26.2 Alıştırmalar	546
26.3 Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi Örnekleri	547
26.3.1 Merkeze Göre Simetri	547
26.3.2 Ox - Eksenine Göre Simetri	547
26.3.3 Oy - Eksenine Göre Simetri	547
26.4 Grafik Çiziminde İzlenecek Yol:	549
26.5 Alıştırmalar	550
26.6 Kutupsal Sistemde Teğetin Eğimi	550
26.7 Kutupsal Koordinatlarda Alan hesabı	551
26.8 İki kutupsal eğri arasında kalan alan	552
26.9 Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu	554
26.10 Kutupsal Koordinatlarda Dönel Yüzeyler	554
26.11 Alıştırmalar	555
26.12 Parametrik Fonksiyonların Türevi	556
26.13 İkinci Basamaktan Türev	557
26.14 Alıştırmalar	559
26.15 Sayısal İntegraller	561
26.15.1 Dikdörtgen Yöntemi	561
26.16 Yamuk Kuralı	562
26.17 Pappus teoremleri	563
26.18 Alıştırmalar	564
26.18.1 Dairesel Simit'in Yüzeyi	565
26.18.2 Dairesel Simit'in Hacmi	565
26.19 Simpson Yöntemi	565
26.20 Alıştırmalar	568
26.21 Alan Hesabı	569
26.22 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	569

27 Diziler 13

27.0.1 Örnekler	574
27.0.2 Yakınsak Dizi	574
27.1 Aritmetik Dizi	575
27.2 Geometrik Dizi	576
27.3 Monoton Dizi	576
27.4 Alt dizi	576
27.5 Sınırlı dizi	577
27.6 Dizilerde Limit Özellikleri	577
27.7 Alıştırmalar	582

28 Seriler 14

28.0.1 Kısmi Toplam	584
28.1 Yakınsak Seriler	584
28.2 Rasyonel Terimli Seriler	584
28.3 Özel Seriler	585
28.4 Aritmetik Seri	585
28.5 Geometrik Seri	586
28.6 Binom Serisi	587
28.7 Genelleşmiş Binom Teoremi	588
28.8 Serilerin Özellikleri	589
28.9 Alıştırmalar	592
28.10 Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	592
28.11 Yakınsaklık Aralığı	593
28.12 Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler	594
28.13 Toplama ve Çıkarma	594
28.14 Kuvvet Serilerin Çarpımı	595
28.15 Kuvvet Serilerinin Bölümü	595
28.15.1 Alterne Seriler	595
28.16 Alıştırmalar	598
28.17 Cauchy Dizi ve Serileri	599

29 Seriler İçin Yakınsaklık Testleri 14

29.1 p-serisi	606
29.2 Oran Testi	606
29.3 Kök Testi	609
29.4 İntegral Testi: p-serisi	609
29.5 p-serisi	611
29.6 Karşılaştırma Testleri	612
29.7 Limit Karşılaştırma Testi	614
29.8 Oran Testi	617
29.9 Newton Metodu	621

30 Değişken Terimli Seriler 14

30.1 Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	625
30.2 Yakınsaklık Aralığı	626
30.3 Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler	627

30.4	Toplama ve Çıkarma	627
30.5	Kuvvet Serilerin Çarpımı	627
30.6	Kuvvet Serilerinin Bölümü	628
30.7	Maclaurin Serisi Uygulamaları	628
30.8	Düzgün Yakınsama	631
30.8.1	Fonksiyon Dizileri	631
30.8.2	Fonksiyon Serileri	635
30.8.3	Fonksiyon Dizileri İçin Cauchy Kriteri	637
30.8.4	Fonksiyon Serileri İçin Cauchy Kriteri	638
30.9	Alıştırmalar	640
30.10	Fonksiyon Dizi ve Serilerinin İntegrali	640
30.11	Dirichlet ve Abel Testleri	644
30.12	Dirichlet Testi	645
30.13	Fonksiyon Dizi ve Serilerinin Türevlenmesi	647
30.14	Alıştırmalar	648
30.15	Kuvvet Serilerinin Türevlenmesi	650
30.16	Alıştırmalar	652
30.17	Kuvvet Serilerinin İntegrali	653
30.18	Çözümlü Kuvvet Serisi Problemleri	654
30.19	Alıştırmalar	657
30.20	Serilerin Yaklaşık Toplamı	658
30.21	Alıştırmalar	660

31 Vektörler 15

31.1	Vektör Uzayı	661
31.2	Simgeler	662
31.3	Denk Vektörler	662
31.4	Vektörlerin Gösterimi	662
31.5	Vektör Uzayında İşlemler	663
31.5.1	Sıfır Vektörü	663
31.6	Vektörlerin Toplamı	663
31.6.1	Toplamının Özellikleri	664
31.7	Vektörlerde Çıkarma İşlemi	664
31.8	Vektörün Sayı ile Çarpımı	664
31.9	Birim Vektör	665
31.10	Doğrultu Açıları	665
31.11	Analitik Geometriye Giriş	666
31.12	Alıştırmalar	667
31.13	Bileşenlerle İşlemler	668
31.14	Nokta Çarpım	669
31.15	İz düşüm	670
31.15.1	İz düşümün Genellenmesi	670
31.16	iki Vektör Arasındaki Aç	671
31.17	iki Vektör Arasındaki Açının Ölçümü	672
31.18	iki Vektörün Birbirine Dikliği	672
31.18.1	Üçgen Eşitsizliği	673
31.19	Uzayda Doğru ve Düzlem	674
31.20	iki noktası Verilen Doğru Denklemi	674

31.21Noktanın Doğruya Uzaklığı	675
31.22Düzlem Denklemi	676
31.23Üç Noktadan geçen Düzlem Denklemi	676
31.24Noktanın Düzleme Uzaklığı	677
31.25Alıştırmalar	678
31.26Vektörel Çarpım	679
31.27Vektörel Çarpımın Özellikleri	680
31.28VektörelÇarpımı Geometrik Yorumları	680
31.28.1Diklik	680
31.28.2Alan	681
31.29Üçlü Çarpım	681
31.30Alıştırmalar	682
31.31Uzayda Doğru ve Düzlem	682
31.32İki noktası Verilen Doğru Denklemi	683
31.33Noktanın Doğruya Uzaklığı	684
31.34Düzlem Denklemi	684
31.35Üç Noktadan Geçen Düzlem Denklemi	685
31.36Noktanın Düzleme Uzaklığı	686
31.37Alıştırmalar	687

32 Katlı İntegral 16

32.1 İki Katlı İntegralin Özellikleri	690
32.2 Ardışık İntegral	691
32.3 Katlı İntegral Uygulamaları	702
32.4 Alıştırmalar	707
32.5 Katlı integralde değişken değiştirme	707
32.6 Alıştırmalar	710
32.7 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	711
32.8 Alıştırmalar	713
32.9 İki Katlı İntegral İle Hacim hesapları	714
32.10Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller	715
32.11Alıştırmalar	718

33 Üç Katlı İntegraller 16

33.1 Hacim	723
33.2 Alıştırmalar	725
33.3 Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	725
33.4 Alıştırmalar	726
33.5 Silindirselsel Koordinatlar	726
33.5.1 Silindir Nedir?	726
33.6 Alıştırmalar	730
33.7 Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	730
33.8 Alıştırmalar	734

34 Eğrisel İntegraller 16

34.1 Düzlemde Eğrisel İntegral	735
34.2 Uzayda Eğrisel İntegral	740

34.3	Alıştırmalar	742
34.4	Vektör Alanlarının Eğrisel İnteralleri	743
34.5	Divergence	744
34.6	Vector Alanını Eğrisel İntegrali	746
34.7	Eğrisel İntegralle İş	748
34.8	Alıştırmalar	749
34.9	İntegralin Yoldan Bağımsızlığı	750
34.10	Alıştırmalar	755
34.11	Üç Boyutlu Uzayda Korunumlu Vektör Alanı	755
34.12	Green Teoremi	756
34.13	Green teoremi İle Alan Hesabı	759
34.14	Alıştırmalar	760
34.15	Yüzey İntegralleri	760
34.16	Parametrik Yüzeyin Alanı	762
34.17	Yüzey İntegrali	765
34.18	Önlenendirilmiş Yüzey Üzerinde İntegral	767
34.19	Vektör Alanlarının İntegrali	768
34.20	Stokes Teoremi	769
34.21	Divergence Teoremi	773
34.21.1	Alıştırmalar	776

35 Vektör Değerli Fonksiyonlar 17

35.1	Vektör Değerli Fonksiyonlar ve Uzay Eğrileri	777
35.2	Vektör Değerli Fonksiyonların Limiti	778
35.2.1	Limit	778
35.3	Vektör değerli Fonksiyonların Sürekliliği	780
35.4	Süreklilik	780
35.5	Türev	780
35.6	Türev Kuralları	781
35.7	Vektör değerli Fonksiyonların Teğeti	782
35.8	Düzgün Eğri	782
35.8.1	Düzgün Eğriler	783
35.9	Vektör Değerli Fonksiyonların integrali	783
35.9.1	Belirsiz İntegral	783
35.9.2	Belirli İntegral	784
35.10	Alıştırmalar	785
35.11	Eğri Uzunluğu	786
35.12	Eğrilik	787
35.13	Eğrilik Çemberi	789
35.14	Normal ve İkinci Normal Vektörler	790
35.15	Alıştırmalar	791
35.16	Uzayda Hareket	792
35.17	Kepler Yasaları	794
35.18	Alıştırmalar	794

36 Konikler 17

36.1	Koniklerin Adlandırılması	795
36.2	Koniklerin Kutupsal Sistemdeki Denklemleri	795

36.3 Koniklerin Kartezyen Denklemi	797
36.4 Alıştırmalar	799
36.5 İkinci Dereceden Yüzeyler	799
36.6 Elipsoid	801
36.7 Elipsoid	801
36.8 Hiperboloid	801
36.9 Eliptik Paraboloid	804
36.10Eliptik Koni	804
36.11Alıştırmalar	805

37 Fiziksel uygulamalar 18

37.1 Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	807
37.2 Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	807
37.3 Alıştırmalar	811
37.4 Yay'ın Kütle merkezi	811
37.5 Alıştırmalar	811
37.6 Yoğunluk	811
37.7 Moment	812
37.7.1 Noktaya Göre Moment	812
37.7.2 Doğru üzerinde Moment	812
37.8 Kütle Merkezi	813
37.9 Noktanın Eksene Göre Momenti	813
37.10Düzleme Göre Moment	814
37.11Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	815
37.12Bir Yayın Momenti	815
37.13Uygulamalar	816
37.14Üç Katlı İntegral İle Moment	817
37.15Düzlemsel Bölgelerin Kütle Merkezi	818
37.16Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	819
37.17Alıştırmalar	822
37.18Yay'ın Kütle merkezi	822
37.19Alıştırmalar	823
37.20Yoğunluk	823
37.21Work (İş)	824

38 Diferensiyel denklemler 18

38.1 Birinci basamaktan birinci dereceden Diferensiyel denklemler	827
38.2 Özel ve Genel Çözüm	828
38.3 Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	828
38.4 Denklemin Doğrusala Dönüşmesi	830

39 Diferensiyel Denklemler 18

39.1 Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	831
39.2 Tam Diferensiyel	833
39.3 Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	840
39.4 Alıştırmalar	843
39.5 İntegral Çarpımı	844

39.6	Alıştırmalar	852
39.7	Birinci Basamaktan Homojen denklemler	854
39.8	Alıştırmalar	862
39.9	Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	864
39.10	Alıştırmalar	868
39.11	İtam Diferensiyel	869
39.12	Alıştırmalar	874
39.13	Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	876
39.14	Alıştırmalar	879
39.15	İntegral Çarpanı	881
39.16	Alıştırmalar	888
39.17	Birinci Basamaktan Homojen denklemler	889
39.18	Alıştırmalar	894
39.19	Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	895
39.20	Alıştırmalar	900
39.21	Bernoulli Diferensiyel Denklemi	901
39.22	Bernoulli Diferensiyel Denkleminin Çözümü	901
39.23	Çözümlü Örnekler	902
39.24	Alıştırmalar	905
39.25	Riccati Diferensiyel Denklemi	906
39.26	Clairaut Diferensiyel denklemleri	910
39.27	Lagrange Diferensiyel Denklemi	911
39.28	Alıştırmalar	913

40 Üç Katlı İntegraller 19

40.1	Hacim	917
40.2	Alıştırmalar	919
40.3	Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	919
40.4	Alıştırmalar	920
40.5	Silindriyel Koordinatlar	921
40.6	Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	923
40.7	Alıştırmalar	926
40.8	Düzensiz İntegraller	927
40.9	Aralığın Sonsuz Olması Durumu	927
40.9.1	$[a, \infty)$ aralığında integral	927
40.9.2	$(-\infty, a]$ aralığında integral	927
40.9.3	$(-\infty, \infty)$ aralığında integral	928
40.10	Aralığın uç noktalarında fonksiyonun sınırsız olması durumu:	928
40.10.1	Sol Uç	928
40.10.2	Sağ Uç	928
40.11	Aralığın içinde fonksiyonun sınırsız olması durumu:	928
40.12	Düzensiz intgralleri karşılaştırma:	929
40.12.1	Alıştırmalar	937
40.13	Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	937
40.14	Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	938
40.15	Alıştırmalar	941
40.16	Yay'ın Kütle merkezi	941
40.17	Alıştırmalar	942

40.18Yoğunluk	942
40.19Sıvı Basıncı	942
40.20Work (İş)	944
40.21Pappus teoremleri	945
40.22Alıştırmalar	946
40.23Simpson Yöntemi	947
40.24Yamuk Kuralı	949
40.25Moment	951
40.26Noktaya Göre Moment	951
40.27Doğru üzerinde Moment	951
40.27.1Kütle Merkezi	952
40.28Noktanın Eksene Göre Momenti	952
40.29Düzleme Göre Moment	952
40.30Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	953
40.31Bir Yayın Momenti	954
40.32Uygulamalar	955

41 *Belirli İntegral Uygulamaları* 20

41.1 Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu	957
41.2 Alan hesapları	960
41.3 Foksiyonun Orta Değeri	961

Index 20

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

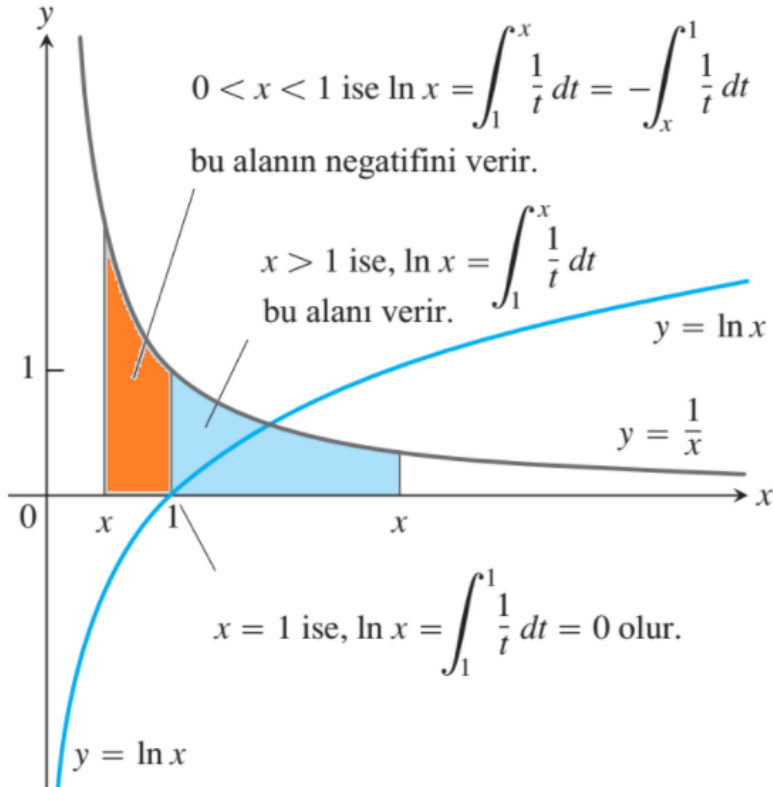
32 Doğal Logaritma Fonksiyonu

Rasyonel üsleri kullanarak üslü ve köklü ifadelerle ilgili cebirsel işlemleri yapmayı biliyoruz. Ama üs bir rasyonel sayı olmak yerine bir irrasyonel sayı olduğunda elimizde, şu ana kadar, bir tanım yoktur. Örneğin, $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$ olduğunu biliyoruz. Ama 2^π ifadesini bilmiyoruz. Tabii,

$$2, 2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.1415}, 2^{1.14159}, \dots$$

dizinin limiti olarak 2^π sayısını tanımlamak mümkündür. Böyle bir yöntemle başvurulduğunda her r irrasyonel sayısına yakınsayan bir $\{r_n\}$ dizisi bulmak gerekecektir. Kuramsal olarak bu mümkündür ama, pratikte zor olur. Onun yerine bildiklerimize dayalı daha kolay bir yöntem izlemeliyiz.

Üslü ve köklü ifadelerin irrasyonel üslere genelleşmesi matematiğin ve uygulamasının çok önemli bir problemidir. Önce doğal logaritme fonksiyonunun tanımı ile başlayalım.



32.1 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Tanımı

Tanım 32.1.

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denilir.

Eşitliğin sağındaki belirli integral tanımlıdır. Dolayısıyla eşitliğin solundaki $y = \ln x$ fonksiyonu kesinlikle belirlenmiş olur. Ayrıca eşitliğin iki yanının türevini alırsak,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \quad 0 < x < \infty$$

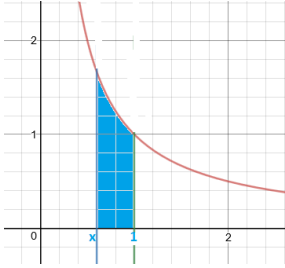
elde edilir.

Teorem 32.2.

$$\ln 1 = 0$$

dır.

Bunun kanıtı belirli integralde alt ve üst sınırların eşit kılınması halinde alanın 0 olduğu gerçeğinden çıkar. Doğal logaritma fonksiyonunu ne olduğunu algılamak için, onu görsel halde getiten Figure (0)'e bakmak yetecektir. Bu fonksiyon Ox eksenini $x = 1$ noktasında keser. Her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlı ve sonludur. $x \rightarrow \infty$ için integral sınırsız olarak büyür ve $+\infty$ 'e gider.



Şekil 32.2: $\ln(-x)$

32.2 Tanım bölgesini Genişletme

Tanım bölgesini $(0, 1]$ aralığına genişletme:

$x \in [0, 1]$ aralığında doğal logaritma fonksiyonunu tanımlamak için integral sınırlarını yer değiştirmek yetecektir:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\ln x = \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

olur. Bu durumu görselleştiren Figure (32.2)'e bakınız.

Tanım bölgesini $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 'a genişletme:

Bunu yapmak için

$$\ln |x| = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten $x > 0$ ise $|x| = x$ olduğundan $(0, \infty)$ aralığında eşitlik sağlanır. $(-\infty, 0)$ aralığında ise $|x| = -x$ olduğundan

$$\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{x}$$

dir. Pozitif ve negatif x değerleri için tüğrevleri eşit olduğundan, belirsiz integral ifadesiyle

$$\int \frac{1}{t} dx = \ln |x| + C$$

yazılabilir.

32.3 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

Teorem 32.3.

- (i) $\ln ab = \ln a + \ln b$
- (ii) $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$
- (iii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- (iv) $\ln x^r = r \ln x \quad (r \in \mathbb{Q}, x > 0)$

Kanıtlar: (i):

$$\frac{d}{dx} \ln ax = \frac{1}{ax} \frac{d}{dx} ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

dir. Türevleri eşit olan fonksiyonlar bir sabit farkıyla birbirlerine eşit olacaklarından

$$\ln ax = \ln x + C$$

yazılabilir. Şimdi C sabitinin ne olduğunu belirlemeliyiz. Önceki ifadede $x = 1$ koyarsak $\ln a = \ln 1 + C = C$ elde edilir ki bu $C = \ln a$ olması demektir. Bunu yukarıdaki eşitlikte kullanırsak $\ln ab = \ln a + \ln b$ bağıntısını elde ederiz.

(ii):

(i) eşitliğinin tersinden gidersek,

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln \left(a \cdot \frac{1}{a} \right) = \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

çıkar. ,

(iii):

$$\ln \frac{a}{b} = \ln \left(a \cdot \frac{1}{b} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} \Rightarrow \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

çıkar.

(iv):

Kanıtlanacak eşitliğin iki yanının türevlerini alalım:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln x^r &= \frac{1}{x^r} \frac{d}{dx} x^r = \frac{1}{x^r} r x^{r-1} = \frac{r}{x} \\ \frac{d}{dx} (r \ln x) &= \frac{r}{x} \end{aligned}$$

çıkar. Yine türevleri eşit olan iki fonksiyonun bire sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğu gerçeğini kullanırsak, $\ln x^r = r \ln x + C$ eşitliğini elde ederiz. C sabitini belirlemek için $x = 1$ koyalım: $\ln 1 = r \ln 1 + C$ eşitliği bulunur. Buradan $C = 0$ çıkar. O halde son ifadeden istenen, $\ln x^r = r \ln x$ eşitliği elde edilir. \square

Teorem 32.4.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

dur.

Kanıt: $x = 2$ ve $r = n$ koyarsak Teorem (32.3)'ün (i v)-üncü ifadesi $\ln 2^n = n \ln 2$ biçimini alır. $\ln 2 > \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2}, \quad \ln 2^{-2} - n \ln 2 < -n \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{n}{2}$$

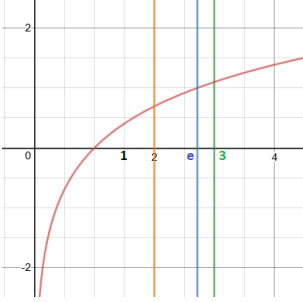
olur. $\ln x$ artan bir fonksiyon olduğu için her n için $x > \frac{n}{2}$ seçebiliriz. n sonsuza giderken limit alırsak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

olur. Benzer şekilde her n için $x < -\frac{n}{2}$ olacak şekilde x değeri seçilebilir. Buradan da

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

elde edilir.



Şekil 32.3: $\ln x$ 'in grafiği

32.4 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$y = \ln x$ fonksiyonunun davranışını incelemek için birinci ve ikinci basamakatan türevleri alınabilir. Asıl $y = \ln x$ fonksiyonunun tanım bölgesi $(0, \infty)$ aralığı, değer bölgesi bütün \mathbb{R} dir. Fonksiyon artan bir fonksiyondur. Kolları aşağı doğru bükeydir. Oy ekseninin negatif tarafına ∞ 'de asimptottur. Ox eksenini $x = 1$ noktasında keser. $x < 1$ için fonksiyon değerleri negatif, $x > 1$ için pozitifdir.

32.5 Logaritmik Türev

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

eşitliğinde $x = u$ koyarsak

$$\int \frac{du}{|u|} = \ln|u| + C$$

çıkar. Buradan türev alırsak

$$\frac{du}{|u|} = \frac{1}{|u|} \frac{d}{dx} u = \frac{u'}{u}, \quad u \neq 0$$

bağıntısı yazılabilir. Bu eşitliği bir formül olarak kullanabiliriz.

32.6 Logaritmik Türevin İntegrali

$$\frac{d}{dx} \ln|u| = \frac{u'}{u}$$

eşitliğini kullanarak, $\frac{u'}{u}$ biçimindeki ifadelerin integralini hesaplayabiliriz.

Örnek 32.5. $\int \tan x dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = \cos x$, $du = -\sin x$ dersek, integral

$$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int -\frac{du}{u} dx = -\ln u + C = -\ln \cos x + C$$

Teorem 32.6.

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C \quad (a \neq b)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt:

$$\ln f(x) = \ln \frac{x+a}{x+b} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C \quad (a \neq b)$$

eşitliği çıkar. İki tarafı $b-a$ ile bölersek iatennen formül ortaya çıkar.
 $a \neq 0$ kabulü altında $b = -a$ konumu ikinci formülü verecektir.

32.7 Üstel Fonksiyon

$y = \ln x$ doğal logaritma fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında artan, sürekli bir fonksiyondur. Değer bölgesi bütün \mathbb{R} dir. Bire-bir ve örten olduğu için ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyon

$$f(x) = e^x \quad \text{ya da} \quad f(x) = e(x)$$

ile gösterilir ve üstel fonksiyon diye anılır. Fonksiyon ve tersi $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan üstel fonksiyonun grafiğini $y = \ln$ fonksiyonunun grafiğinden hemen elde edebiliriz.

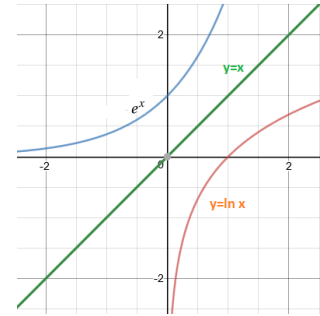
Üstel Fonksiyonun Özellikleri

Teorem 32.7.

- (i) $\ln(e^x) = x, \quad e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$
- (ii) $e^0 = 1, \quad e^1 = e$
- (iii) $e^{(x+y)} = (e^x)(e^y)$
- (iv) $\exp(\ln x) = x \quad (x > 0), \quad \ln(\exp(x)) = x$
- (v) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
- (vi) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- (vii) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$
- (viii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

Kanıt:

Kanıtlar, $y = e^x$ ile $y = \ln x$ fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olduğu ve grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğu gerçeğinden çıkar.



Şekil 32.4: Üstel Fonksiyon

32.8 a tabanlı Üstel Fonksiyon

$y = \exp x = e^x$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için vardır. Dolayısıyla, yalnızca rasyonel üsler için bildiğimiz işlemleri e tabanı için bütün gerçel sayılara taşımaktadır. Tabii burada bir eksikliği hemen hissediyoruz. Neden yalnızca e tabanı için genelleme yapılıyor? Acaba bütün gerçel sayılara bu genelleme yapılamaz mı?

Sorunun yanıtı "evet" tir. Şimdi genellemeyi bütün \mathbb{R} üzerine yapacağız.

Tanım 32.8. a bir gerçel sayı ise

$$\exp_a x = a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

diye tanımlanır.

Eşitliğin sağındaki terim her gerçel x sayısı için vardır.

Bir tanımı daha büyük bir kümeye genelleştirirken, küçük küme için var olan bütün özelliklerin korunması gerekir. Aksi halde yapılan iş bir genelleme olmaz. Yukarıdaki tanım tabanı rasyonel sayılardan gerçel sayılara taşıyan bir genelleme ise, rasyonel sayılar için varlığını bildiğimiz özelliklerin korunması gerekir. Gerçekten r bir rasyonel sayı ise

$$\ln A^r = r \ln a, \quad \exp_a r = \exp(r \ln a) = \exp(\ln a^r) = a^r$$

dır. Dolayısıyla yaptığımız tanım rasyonel sayılar için de geçerlidir. Yaptığımız genellemeyi biraz daha görsel kılmak için

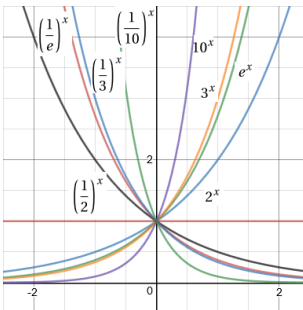
$$a^x = \exp_a x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

yazabiliriz.

a^x üstel fonksiyonu ne^x fonksiyonunun sağladığı bütün özellikleri sağlar. Başka bir deyişle, a^x fonksiyonu üslü çokluklar için bildiğimiz bütün cebirsel işlemlere uyar. BU özellikleri, n bazılarını listeleyebiliriz.

Teorem 32.9. $a > 0$ olmak üzere $y = a^x$ üstel fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- (i) $a^{-x} = e^{-x \ln a} = \frac{1}{e^{x \ln a}}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- (ii) $a^0 = 1, \quad a^1 = a$
- (iii) $a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y$
- (iv) $\ln a^x = x \ln a$
- (v) $(a^x)^y = a^{xy}$
- (vi) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- (vii) $(ab)^x = a^x \cdot b^x$



Şekil 32.5: Üstel Fonksiyonların Davranışı

Kanıt: Rasyonel üslü çokluklar için bildiğimiz bu özellikler tanımdan çıkar.

32.9 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Davranışı

$y = a^x$ fonksiyonunun davranışı öteki fonksiyonlar için yaptığımız gibi birinci ve gerekiyorsa ikinci basmakatan türevlerine bakarak incelenebilir. Ama o kadar ileriye gitmeden, üstel fonksiyonun tanım bölgesinin bütün \mathbb{R} , değer bölgesinin $(0, \infty)$ olduğunu, $a > 1$ ise fonksiyonun artan, $a < 1$ ise fonksiyonun azalan olduğunu $y = e^{x \ln a}$ fonksiyonundan söyleyebiliriz. Buna göre fonksiyonun grafiğini a tabanının farklı bir kaç değeri için çizmek için üstel fonksiyonun davranışı hakkında bir algı oluşturacaktır.

32.10 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Türevi

$y = e^x$ fonksiyonunun türevinden $y = a^x = e^{x \ln a}$ fonksiyonunun türevi kolayca elde edilir:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx} (x \ln a)$$

olur.

32.11 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun İntegrali

Yukarıdaki türev formülünden $y = a^x$ fonksiyonunun integrali için,

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

formülü elde edilir.

32.12 a Tabanına Göre Logaritma

Tanım 32.10. $y = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna a tabanlı logaritma fonksiyonu denilir ve $y = \log_a x$ ile gösterilir.

Ters fonksiyonun $y = x$ doğrusuna göre simetrik olacağını düşünerek, $y = \log_a x$ fonksiyonunun davranışını belirleyebiliriz. Buna göre, fonksiyonun tanım bölgesi $(0, \infty)$ aralığı, değer bölgesi bütün \mathbb{R} dir. $a > 1$ ise fonksiyon artar, $a < 1$ ise azalır. Farklı tabanlara göre $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği yandaki şekillerden görülebilir.

32.13 $\log_a x$ fonksiyonunun özellikleri

Teorem 32.11.

- (i) $a^x = e^{x \ln a}$
- (ii) $a^{\log_a x} = x \Leftrightarrow e^{\log_a x \cdot \ln a} = x$
- (iii) $\log_a x \cdot x \ln a = \ln x$
- (iv) $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- (v) $\log_a a^x = x$
- (vi) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

dır.

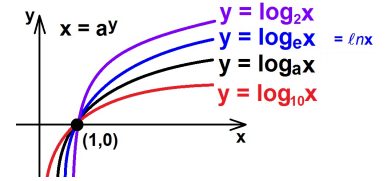
Kanıt: Rasyonel üslü ifadelerde yapıldığı gibidir.

32.14 $\log_a x$ fonksiyonunun Türevi

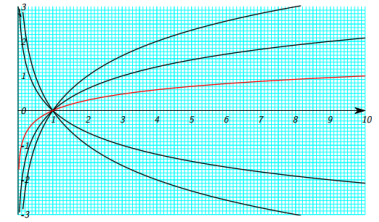
Teorem 32.12.

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

dır.



Şekil 32.6: Logaritma Fonksiyonları



Şekil 32.7: Farklı tabanlara göre logaritma fonksiyonları

Kanıt:

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d \ln x}{dx \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

olur.

32.15 Çözümlü Problemler

1.

$$y = f(x) = (x^2 + \ln(x+1))(4x^2 - 1)$$

fonksiyonunun birinci ve ikinci basamaktan türevlerini bulunuz.

Çözüm: Çarpımın türevi kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot \ln(x+1) + x^2 (\ln(x+1))' \\ &= 2x \cdot \ln(x+1) + x^2 \frac{1}{x+1} \cdot (x+1)' \\ &= 2x \cdot \ln(x+1) + x^2 \frac{1}{x+1} \cdot 1 \\ &= 2x \cdot \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1} \end{aligned}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x \cdot \ln(x+1))' + \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' \\ &= 2 \ln(x+1) + 2x \frac{1}{x+1} \cdot 1 + \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= 2 \cdot \ln(x+1) + \frac{2x}{x+1} + \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2. $a \in \mathbb{R}$ ise;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ae^{ax}}{1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{1} \right) \\ &= a \end{aligned}$$

olur.

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Bazı problemlerde $0 \cdot \infty$ belirsizliği $0/0$ ya da ∞/∞ belirsizliklerine

dönüştürülerek l'Hospital Kuralı uygulanabilir.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

5. Bazı problemlerde $\infty - \infty$ belirsizliği $0/0$ ya da ∞/∞ belirsizliklerine dönüştürülerek l'Hospital Kuralı uygulanabilir.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^3}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^3}{3} \\ &= 0\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \ln 3 - 2^x \ln 2}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln 3 - \ln 2 \\ &= \ln \frac{3}{2}\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2e^{2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{4e^{2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{8e^{2x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/\ln x} = e$$

olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{1/\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}} \\
&= e^{\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} \right]} \\
&= e^{\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} \right]} \\
&= e^{\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x}{\sin x} \right]} \\
&= e^{\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} \right]} \\
&= e^1 \\
&= e
\end{aligned}$$

11.

$$\frac{d}{dx} (e^{x/2} \sin(ax)) = \frac{1}{2} e^{x/2} (\sin(ax) + 2a \cos(ax)) + C$$

olduğunu gösteriniz

12.

$$\frac{d}{dx} (x^x) = x^x (\ln x + 1) + C$$

olduğunu gösteriniz

13.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + 1) + C$$

olduğunu gösteriniz.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} \\ &= \frac{e^0}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-ae^{-ax} + be^{-bx}}{1} \\ &= \frac{b - a}{1} \\ &= b - a\end{aligned}$$

Index

e^x , 491

üstel fonksiyon, 491

a tabanlı logaritma, 493