TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

6 *Rasyonel Üslü İfadeler* 4

7 *Denklemler* 5

25 İntegral Alma Yöntemleri 12

26 Kutupsal Koordinatlar 13

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

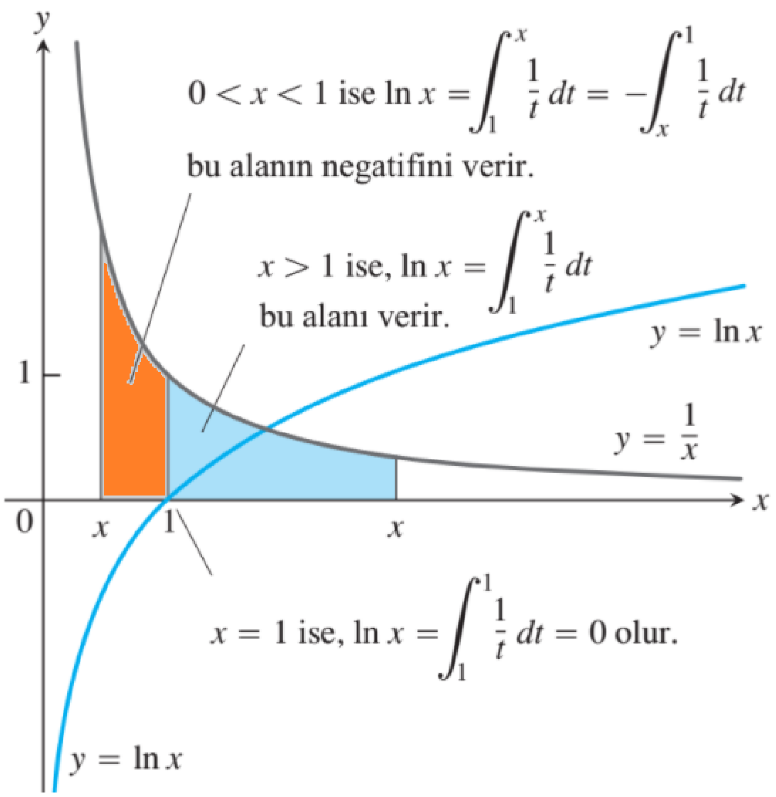
32 Doğal Logaritma Fonksiyonu

Rasyonel üsleri kullanarak üslü ve köklü ifadelerle ilgili cebirsel işlemleri yapmayı biliyoruz. Ama üs bir rasyonel sayı olmak yerine bir irrasyonel sayı olduğunda elimizde, şu ana hadar, bir tanım yoktur. Örneğin, $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$ olduğunu biliyoruz . Ama 2^{π} ifadesini bilmiyoruz. Tabii,

$$2, 2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.1415}, 2^{1.14159}, \ldots$$

dizinin limiti olarak 2^{π} sayısını tanımlamak mümkündür. Böyle bir yöntenme başvurulduğunda her r irrasonel sayısına yakınsayan bir $\{r_n\}$ dizisi bulmak gerekecektir. Kuramsal olarak bu mümkündür ama, pratikte zor olur. Onun yerine bildiklerimize dayalı daha kolay bir yöntem izlemeliyiz.

Üslü ve köklü ifadelerin irrasyonel üslere genelleşmesi matematiğin ve uygulamasının çok önemli bir problemidir. Önce doğal logaritme fonksiyonunun tanımı ile başlayalım.



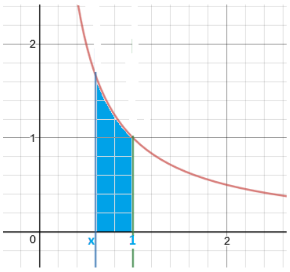
32.1 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Tanımı

Tanım 32.1.
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$
fonksiyonuna doğal logaritna fonksiyonu denilir.

Eşitliğin sağındaki belirli integral tanımlıdır. Dolayısıyla eşitliğin solundaki $y = \ln x$ fonksiyonu kesinlikle belirlenmiş olur. Ayrıca eşitliğin iki yanının türevini alırsak,
$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \qquad 0 < x\infty$$
elde edilir.

Teorem 32.2.
$$\ln 1 = 0$$
dır.

Bunun kanıtı belirli integralde alt ve üst sınırların eşit kılınması halinde alanın 0 olduğu gerçeğinden çıkar. Doğal logaritma fonksiyonunu ne olduğunu algılamak için, onu görsel halae getiten Figure ()'e bakmak yetecektir. Bu fonksiyon Ox eksenini $x = 1$ noktasında keser. Her $x \in \mathbb{R}$ için tanımlı ve sonludur. $x \to \infty$ için integral sınırsız olarak büyür ve $+\infty$'e gider.



Şekil 32.2: $ln(-x)$

32.2 Tanım bölgesini Genişletme

Tanım bölgesini $(0,1]$ *aralığına genişletme:*

$x \in [0,1]$ aralığında doğal logaritma fonksiyonunu tanımlamak için integral sınırlarını yer değiştirmek yetecektir:
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\ln x = \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$$
olur. Bu durumu görselleştiren Figure (32.2)'e bakınız.

Tanım bölgesini $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0) \cup (0,\infty$*'a genişletme:*

Bunu yapmak için
$$\ln|x| = \int_1^x \frac{1}{t}$$
$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$
olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten $x > 0$ ise |x|= x olduğundan $(0,\infty)$ aralığında eşitlik sağlanır. $(-\infty,0)$ aralığında ise |x| = -x olduğundan
$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{x}$$
dir. Pozitif ve negatif x değerleri için tüğrevleri eşit olduğundan, belirsiz integral ifadesiyle
$$\int \frac{1}{t}\,dx = \ln|x| + C$$
yazılabilir.

32.3 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Özelikleri

Teorem 32.3.

$$
\begin{aligned}
(i)&\quad \ln ab = \ln a + \ln b\\
(ii)&\quad \ln \frac{1}{a} = -\ln a\\
(iii)&\quad \ln \frac{a}{b} = -\ln a - \ln b\\
(iv)&\quad \ln x^r = r\ln x \qquad (r\in\mathbb{Q}, x>0)
\end{aligned}
$$

Kanıtlar: **(i)**:

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{ax}\frac{d}{dx}ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

dir. Tüğrevleri eşit olan fonksiyonlar bir sabişt farkıyla birbirlerine eşit olacaklarından

$$\ln ax = \ln x + C$$

yazılabilir. Şimdi C sabitinin ne olduğunu belirlemeliyiz. Önceki ifadede $x=1$ koyarsak $\ln a = \ln 1 + C = C$ elde edilir ki bu $C = \ln a$ olması demektir. Bunu yukarıdaki eşitlikte kullanırsak $\ln ab = \ln a + \ln b$ bağıntısını elde ederiz.

(ii):

(i) eşitliğinin tersinden gidersek,

$$\ln a + \ln\frac{1}{a} = \ln\left(a.\frac{1}{b}\right) = \ln 1 = 0 \Rightarrow \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

çıkar. ,

(iii):

$$\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a.\frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} \Rightarrow \ln\frac{a}{b} = -\ln a - \ln b$$

çıkar.

(iv):

Kanıtlanacak eşitliğin iki yanının türfevlerini alalım:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\ln x^r &= \frac{1}{x^r}\frac{d}{dx}x^r = \frac{1}{x^r}rx^{r-1} = \frac{r}{x}\\
\frac{d}{dx}(r\ln x) &= \frac{r}{x}
\end{aligned}
$$

çıkar. Yine türevleri eşit olan iki fonksiyonun bire sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuj gerçeğini kullanırsak, $\ln x^r = r\ln x + C$ eşitliğini elde ederiz. C sabitini belirlemek için $x=1$ koyalım: $\ln 1 = r\ln 1 + C$ eşitliği bulunur. Buradan $C=0$ çıkar. O halde son ifadeden istenen, $\ln x^r = r$eşitliği elde edilir. □

Teorem 32.4.

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

dur.

Kanıt: $x = 2$ ve $r = n$ koyarsak Teorem (32.3)'un (iv)-üncü ifadesi $\ln 2^n = n \ln 2$ biçimini alır. $\ln 2 > \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\ln 2^n = n \ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}, \qquad \ln 2^{-2} - n \ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$

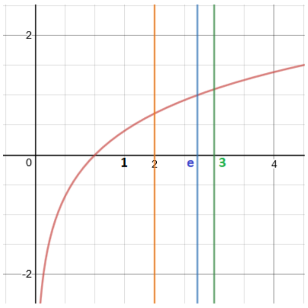
olur. $\ln x$ artan bir fonksiyon olduğu için her n için $x > \frac{n}{2}$ seçebiliriz. n sonsuza giderken limit alırsak,

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

olur. Benzer şekilde he n için $x < -\frac{n}{2}$ olacak şekilde x değeri seçilebilir. Buradan da

$$\lim_{n\to 0^+} \ln x = -\infty$$

elde edilir.



Şekil 32.3: lnx'in grafiği

32.4 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$y = lnx$ fonksiyonunun davranışını incelemek için birinci ve ikinci basamakatan türevleri alınabilir. Asıl $y = \ln x$ fonksiyonunun tanım bölgesi $(0, \infty)$ aralığı, değer bölşgesi bütün $\mathbb{R}$ dir. Fonksiyon artan bir fonksiyondur. Kolları aşağı doğru bükeydir. Oy ekseninin negatif tarafına ∞'de asimptottur. Ox eksenini $x = 1$ noktasında keser. $x < 1$ için fonksiyon değerleri negatif, $x > 1$ için pozitiftir.

32.5 Logaritmik Türev

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

eşitliğinde $x = u$koyarsak

$$\int \frac{du}{|u|} = \ln|u| + C$$

çıkar. Buradan türev alırsak

$$\frac{du}{|u|} = \frac{1}{|}u|\frac{d}{dx}u = \frac{u'}{u}, \quad u \neq 0$$

bağıntısı yazılablir. Bu eşitliği bir formül olarak kullanabiliriz.

32.6 Logaritmik Türevin İntrgrali

$$\frac{d}{dx}\ln|u| = \frac{u'}{u}$$

eşitliğini kullanarak, $\frac{u'}{u}$ biçi,mindeki ifadelerin integralini hessaplayabiliriz.

Örnek 32.5. *$\int \tan x dx$ integraqlini hesaplayınız.*

Çözüm: $u = \cos x, du = -\sin x$ dersek, integral

$$\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \int -\frac{du}{u}\, dx = -\ln u + C = -\ln \cos x + C$$

Teorem 32.6.

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \quad (a \neq b)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt:

$$\ln f(x) = \ln\frac{x+a}{x+b}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C \quad (a \neq b)$$

eşitliği çıkar. İki tarafı $b-a$ ile bölersek iatenen formül ortaya çıkar.

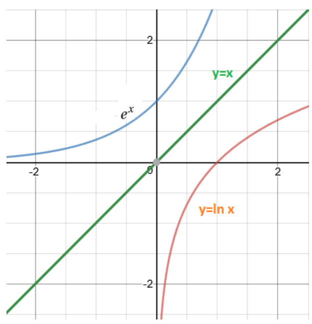
$a\, ne0$ kabulü altında $b = -a$ konumu ikinci formülü verecektir.

32.7 Üstel Fonksiyon

$y = \ln x$ doğal logaritma fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında artan, sürekli bir fonksiyondur. Değer bölgesi bütün $\mathbb{R}$ diar. Bire-bir ve örten olduğu için ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyon

$$f(x) = e^x \quad \text{ya da} \;\; f(x) = e(x)$$

ile gösterilir ve üstel fonksiyon diye anılır. Fonksiyon ve tersi $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan üstel fonksiyonun grafiğini $y = \ln$ fonksiyonunun grafiğinden hemen elde edebiliriz.



Şekil 32.4: Üstel Fonksiyon

Üstel Fonksiyonun Özelikleri

Teorem 32.7.

$$\begin{aligned}
(i) &\quad \ln(e^x) = x, \quad e^{\ln x} = x \quad (x>0)\\
(ii) &\quad e^0 = 1, \quad e^1 = e\\
(iii) &\quad e^{(x+y)} = (e^x)(e^y)\\
(iv) &\quad exp(\ln x) = x \quad (x>0), \quad \ln\big(exp(x)\big) = x\\
(v) &\quad exp(x+y) = exp(x)exp(y)\\
(vi) &\quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}\\
(vii) &\quad \lim_{x\to\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} exp(x) = \infty\\
(viii) &\quad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to-\infty} exp(x) = 0
\end{aligned}$$

Kanıt:

Kanıtlar, $y = e^x$ ile $y = \ln x$ fonksiyonlarının birbirlerinin tersi olduğu ve grafiklerinin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğu gerçeğinden çıkar.

32.8 *a* tabanlı Üstel Fonksiyon

$y = expx = e^x$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için vardır. Dolayısıyla, yalnızca rasyonel üsler için bildiğimiz işlemleri e tabanı için bütün gerçel sayılara taşımaktadır. Tabii burada bir eksikliği hemen hissediyoruz. Neden yalnızca e tabanı için genelleme yapılıyor? Acaba bütün gerçel sayılara bu genelleme yapılamaz mı?

Sorunun yanıtı "evet" tir. Şimdi genellemeyi bütün ℝ üzerine yapacağız.

Tanım 32.8. *a bir gerçel sayı ise*

$$exp_a x = a^x = \exp(x \ln a) = e^{x \ln a}$$

diye tanımlanır.

Eşitliğin sağındaki terim her gerçel x sayısı için vardır.

Bir tanımı daha büyük bir kümeye genelleştiriken, küçük küme için var olan bütün özeliklerin korunması gerekir. Aksi halde yapılan iş bir genelleme olmaz. Yukarıdaki tanım tabanı rasyonel sayılardan gerçel sayılara taşıyan bir genelleme ise, rasyonel sayılar için varlığını bildiğimiz özeliklerin korunması gerekir. Gerçekten r bir rasyonel sayı ise

$$\ln A^r = r \ln a, \quad exp_a r = exp(r \ln a) = exp(\ln a^r) = a^r$$

dır. Dolayısyla yapytığımız tanın rasynel saylar için de geçerlidir. Yaptığımız genellemeyi biraz daha görsel kılmak için

$$a^x = \exp_a x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$$

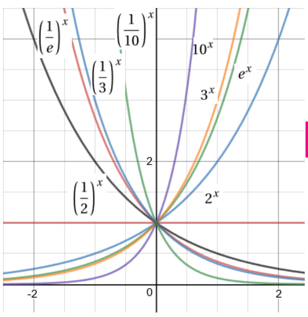
yazabiliriz.

a^x üstel fnksiyonu ne^x fonksiyonunun sağladığı bütün özelikleri sağlar. Başka bir deyişle, a^x fonksiyonu üslü çokluklar için bildiğimiz bütüğn cebirsel işlemlere uyar. BU özelikleri,n bazılarını listeleyebiliriz.

Teorem 32.9. *$a > 0$ olmak üzere $y = a^x$ üstel fonksiyonu aşağıdaki özelikleri sağlar.*

$$
\begin{aligned}
(i) \quad & a^{-x} = e^{-x \ln a} = \frac{1}{e^{x \ln a}}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \\
(ii) \quad & a^0 = 1, \quad a^1 = a \\
(iii) \quad & a^{(x+y)} = a^x . a^y \\
(iv) \quad & \ln a^x = x \ln a \\
(v) \quad & (a^x)^y a^{xy} \\
(vi) \quad & \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \\
(vii) \quad & (ab)^x = a^x . b^x
\end{aligned}
$$

Kanıt: Rasyonel üslü çokluklar için bildiğimiz bu özelikler tanımdan çıkar.



Şekil 32.5: Üstel Fonksiyonların Davranışı

32.9 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Davranışı

$y = a^x$ fonksiyonunun davranışı öteki fonksiyonlar için yaptığımız gibi birinci ve gerekiyorsa ikinci basmakatan türevlerine bakarak incelenebilir. Ama o kadar ileriye gitmeden, üstel fonksiyonun tanım bölgesinin bütün ℝ, değer bölgesinin $(0, \infty)$ olduğunu, $a > 1$ ise fonksiyonujn artan, $a < 1$ ise fonksiyonun azalan olduğunu $y = e^{x \ln a}$ fonksiyonundan söyleyebiliriz. Buna göre fonksiyonun grafiğini a tabanının farklı bir kaç değeri için çizmek için üstel fonksiyonun davranışı hakkında bir algı oluşturacaktır.

32.10 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Türevi

$y = e^x$ fonksiyonunun türevinden $y = a^x = e^{x \ln a}$ fonksiyonunun türevi kolayca elde edilir:

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \frac{d}{dx}(x \ln a)$$

olur.

32.11 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun İntegrali

Yukarıdaki türev formülünden $y = a^x$ fonksiyonunun integrali için,

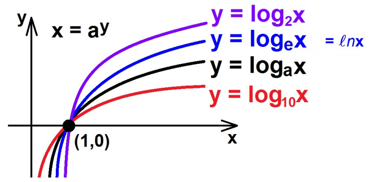
$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

formülü elde edilir.

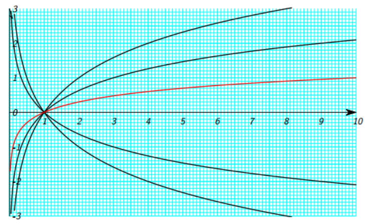
32.12 a Tabanına Göre Logaritma

Tanım 32.10. *$y = a^x$ fonksiyonunun ters fonksiyonuna a tabanlı logaritma fonksiyonu denilir ve $y = log_a x$ ile gösterilir.*

Ters fonksiyonun $y = x$ doğrusuna göre simetrik olacağını düşünürek, $y = log_a x$ fonksiyonunun davranışını belirleyebiliriz. Buna göre, fonksiyonun tanım bölgesi $(0, \infty)$ aralığı, değer bölgesi bütün$\mathbb{R}$ dir. $a > 1$ ise fonksiyon artar, $a < 1$ ise azalır. Farklı tabanlara göre $y = log_a x$ fonksiyonunun grafiği yandaki şekillrden görülebilir.



Şekil 32.6: Lolgaritma Fonksiynmları


Şekil 32.7: Farklı tabanlara göre logaritma fonksiyonları

32.13 $log_a x$ fonksiyonunun özelikleri

Teorem 32.11.

$$\begin{aligned}
(i) &\quad a^x = e^{x \ln a} \\
(ii) &\quad a^{\log_a x} = x \Leftrightarrow e^{\log_a x . \ln a = x} \\
(iii) &\quad \log_a x . x \ln a = \ln x \\
(iv) &\quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \\
(v) &\quad \log_a a^x = x \\
(vi) &\quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}
\end{aligned}$$

dır.

Kanıt: Rasyonel üslü ifadelerde yapıldığı gibidir.

32.14 $log_a x$ fonksiyonunun Türevi

Teorem 32.12.

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

dır.

Kanıt:

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}$$

olur.

32.15 Çözümlü Problemler

1.

$$y = f(x) = (x^2 + ln(x+1)(4x^2 - 1)$$

fonksiyonunun birinci ve ikinci basamaktan türevlerini bulunuz.

Çözüm: Çarpımın türevi kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'.ln(x+1) + x^2\,(ln(x+1))' \\ &= 2x.ln(x+1) + x^2\frac{1}{x+1}.(x+1)' \\ &= 2x.ln(x+1) + x^2\frac{1}{x+1}.1 \\ &= 2x.ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1} \end{aligned}$$

Çözüm:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x.ln(x+1))' + \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' \\ &= 2ln(x+1) + 2x\frac{1}{x+1}.1 + \frac{2x.(x+1) - x^2.1}{(x+1)^2} \\ &= 2.ln(x+1) + \frac{2x}{x+1} + \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

2. $a \in \mathbb{R}$ ise;

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{ax}-1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{ae^{ax}}{1}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{1}\right) \\ &= a \end{aligned}$$

olur.

3.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right) &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) \\ &= \lim_{x\to 1}(x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. Bazı problemlerde $0.\infty$ belirsizliği $0/0$ ya da ∞/∞ belirsizliklerine

dönüştürülerek l'Hospital Kuralı uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}(-x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

5. Bazı problemlerde $\infty-\infty$ belirsizliği $0/0$ ya da ∞/∞ belirsizliklerine dönüştürülerek l'Hospital Kuralı uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}(-x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^3\ln x &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}\\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{3}\\
&= 0
\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^3\ln x &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}\\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{3}\\
&= 0
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{3^x\ln 3-2^x\ln 2}{1}\\
&= \lim_{x\to 0}\ln 3-\ln 2\\
&= \ln\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-2x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{4e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{8e^{2x}}\\ &= 0\end{aligned}$$

10.

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/\ln x} = e$$

olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/\ln x} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}}\\ &= e^{\left[\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x}\right]}\\ &= e^{\left[\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x)}}{\frac{1}{x}}\right]}\\ &= e^{\left[\lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x}{\sin x}\right]}\\ &= e^{\left[\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - x\sin x}{\cos x}\right]}\\ &= e^1\\ &= e\end{aligned}$$

11.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x/2}\sin(ax)\right) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}\,(\sin(ax) + 2a\cos(ax)) + C$$

olduğunu gösteriniz

12.

$$\frac{d}{dx}\left(x^x\right) = x^x\,(\ln x + 1) + C$$

olduğunu gösteriniz

13.

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (\ln x + 1) + C$$

olduğunu gösteriniz.

14. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

15. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1)}{x}$ limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} \\ &= \frac{e^0}{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ limitini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{-ae^{ax}+be^{-bx}}{1} \\ &= \frac{b-a}{1} \\ &= b-a\end{aligned}$$

Index