TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

6 Rasyonel Üslü İfadeler 4

7 Denklemler 5

33 Kutupsal Koordinatlar 12

34 Diziler 13

35 Seriler 13

38 Vektörler 15

40 *Üç Katlı İntegraller* *19*

41 *Belirli İntegral Uygulamaları* *19*

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

39 Katlı İntegral

$$\text{Hacim} = \iint_R f(x,y)\,dA$$

Şekil 39.1: Hacim

Bu bölümde iki ve üç katlı integral uygulamalarına yer verilecektir.

İKI KATLI İNTEGRAL

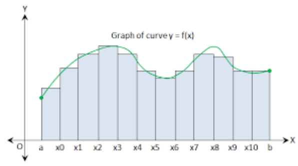
$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonunun tek katlı integralini,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}\ t \in [x_{i-1}, x_i]$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t)\Delta x_i \tag{39.1}$$

Riemann toplamının limiti olarak tanımlamıştık. $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx$ integrali $[a,b]$ aralığı üzerinde ve f fonksiyonunun grafiği altında kalan düzlemsel bölgenin alanına eşit olduğunu biliyoruz.

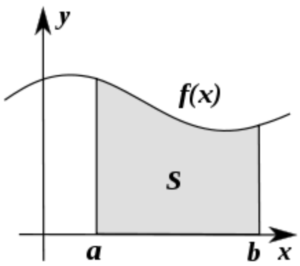


Şekil 39.2: Alan

Şimdi, tek değişkenli fonkiyonlar için bildiğimiz bu integral kavramını

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ z = f(x,y) \tag{39.2}$$

iki değişkenli fonksiyonuna genelleştireceğiz. Tek katlı integraldeki küçük Δz uzunluğu yerine küçük $\Delta x \Delta y$ dikdörtgen alanı gelecektir. S yüzeyi



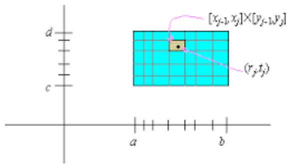
Şekil 39.3: Riemann toplamı

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 0 \leq z \leq f(x,y),\ (x,y) \in D\} \tag{39.3}$$

olsun.

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ z = f(x,y) \tag{39.4}$$

fonksiyonu D bölgesinde tanımlı ve her $(x,y) \in D$ için $|f(x,y)| \leq M$ olacak biçimde bir M sayısı var olsun. Eğer



Şekil 39.4: Bölüntü

$$D = \{(x,y) |\ a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\} \tag{39.5}$$

ise, koordinat eksenleine paraleller çizerek, D bölgesini Şekil (39.10) deki gibi sonlu sayıda küçük dikdörtgenlere ayıralım. Oluşan küçük dikdörtgenler ailesine D bölgesinin bir bölüntüsü (partition) denilir. Bu bölüntüyü $\mathscr{P}$ ile gösterirsek;

$$\begin{aligned} D_{ij} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ &= \{(x,y) |\ x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \\ &(i = 1,2,3,\ldots,m; \quad j = 1,2,3,\ldots,n) \end{aligned}$$

olur. Bölüntü aralıklarını eşit alarak,

$$\Delta x = \frac{b-a}{m},\ \Delta y = \frac{d-c}{n} \tag{39.6}$$

diyelim. D_{ij} dikdörtgenlerinin herbirisin alanı

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i . \Delta y_j \tag{39.7}$$

dir. Bu dikdötgen alanının köşegen uzunluğuna d_{ij} diyelim. Pisagor teoreminden, $d_{ij}^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2$ olur.

$$||\mathscr{P}|| = max\{d_{ij} : (i = 1,2,3,\ldots,m;\ j = 1,2,3,\ldots,n)\} \tag{39.8}$$

$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} \Rightarrow ||\mathscr{P}|| \to 0$$

olacaktır.

Tanım 39.1.

$f(x,y)$ fonlsiyonu düzlemde D bölgesinde tanımlı ve $(s_{ij}, t_{ij}) \in D_{ij}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dA &= \lim_{m\to\infty, n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s_{ij}, t_{ij})\Delta A_{ij} \\ &= \lim_{||\mathscr{P}||\to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(s,t)\Delta A_{ij} \end{aligned}$$

limiti varsa, bu limite $f(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinde *iki katlı integrali* denilir. [1] [2] [3]

Süreksizlik noktalarını atarak fonksiyonun sürekli olduğu bir D bölgesinde integralini tanımlayabiliriz. R dörtgensel bir bölge olmk üzere, $D \subset R$ ve f fonksiyonu D üzerinde sürekli olmak üzere

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

tanımını yapalım. Buradan

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA \tag{39.11}$$

çıkar.

[1] $f(x,y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ise, yukarıdaki limitler vardır. Dolayısıyla, bir bölgede sürekli olan iki değişkenli fonksiyonun o bölge üzerinde iki katlı integrali vardır.

[2] $f(x,y) \geq 0$ ise $z = f(x,y)$ yüzeyinin altında ve D bölgesinin üzerinde oluşan katı cismin hacmi

$$V = \iint_D f(x,y)\,dA \tag{39.9}$$

dır.

[3] $f(x,y) = 1$ ise $z = f(x,y) = 1$ yüzeyinin altında ve D bölgesinin üzerinde oluşan katı cismin hacmi $V = A \times 1 = A$ olacağından, D bölgesinin alanı

$$A = \iint_D dA \tag{39.10}$$

olur.

39.1 İki Katlı İntegralin Özelikleri

KATLI INTEGRAL KURALLARI

$f(x,y)$ ve $g(x,y)$ foksiyonları D bölgesinde integrallenebilir ise,

1.
$$\iint_D \alpha f(x,y)\,dA = \alpha \iint f(x,y)\,dA \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) \tag{39.12}$$

2.
$$\iint_D \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA \pm \iint_D f(x,y)\,dA \tag{39.13}$$

3.
$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y)\,dA \\ &= \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA, \quad (D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset) \end{aligned}$$

4. Her $(x,y) \in D$ için $f(x,y) \leq g(x,y)$ ise

$$\iint_D f(x,y)\,dA \leq \iint_D g(x,y)\,dA \tag{39.14}$$

5.
$$\left|\iint_D f(x,y)\,dA\right| \le \iint_D \left|f(x,y)\right| dA \tag{39.15}$$
olur.

Bunların ispatları iki katlı integral tanımından çıkarılabilir.

39.2 Ardışık İntegral

KATLI İNTEGRALI ART ARDA ALINAN TEK KATLI İTEGRALLERE DÖNÜŞTÜRME

Çok katlı integral hesabı yaparken, tanımı kullanmak pratik değildir. Onun yerine katlı integrali tek katlı integrallerin art arda uygulanması haline dönüştürebiliriz. Bu yöntem işi çok kolaylaştırır. D bölgesi (39.5) gibi verilsin. Bu durumda

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \tag{39.16}$$

eşitliği vardır.

Bu eşitlikte x le y değişkenlerinin sırası değişirilebilir:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy \tag{39.17}$$

Örnek 39.2.
$$\iint_D x^2 y\,dA \tag{39.18}$$
integralini $D = \{0 \le x \le 3; 1 \le y \le 2\}$ *bölgesi üzerinde bulunuz.*

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 y\,dA \\
&= \int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx \\
&= \int_0^3 \left(\int_1^2 x^2 y\,dy\right) dx \\
&= \int_0^3 \left(x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{2}\right) dx \\
&= \int_1^2 \frac{3}{2} x^2\,dx \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x^2 y\,dA \\
&= \int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^3 x^2 y\,dx\right) dy \\
&= \int_1^2 \left(y \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{3}\right) dy \\
&= \int_1^2 9y\,dy \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

olu.

Teorem 39.3. (FUBINI) *$f(x,y)$ fonksiyonu $D=\{(x,y): a\le x\le b; c\le y\le d\}$ bölgesi üzerinde sürekli ise*

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

eşitliği vardır.

[4]

[4] 1870 yılında Venedik'te bir matematikçinin oğlu olarak dünyaya geldi. Matematiğe olan yeteneği onun öğrenimini ve çalışma hayatını belirledi. Matematiğin analiz, geometri, matematiksel fizik gibi değişik alanlarında çalıştı. Özellikle Dini ve Bianchi'den aldığı dersler onu kariyerin üst noktalarına getirdi. İtalya'nın önemli üniversitelerinde çalıştı. Faşizmin ve anti-semitizmin İtalya'da öne çıkmasıyla Fubini de istifaya zorlandı. Son yıllarını ABD'de Advanced Study Institute'de geçirdi. 1943 yılında yaşamını yitirdi.

Şekil 39.5: Guido Fubini(1870-1943)

Örnek 39.4. *$D=\{1\le x\le 2; 0\le y\le 1\}$ bölgesi üzerinde*

$$\iint_D x^2y^5\,dA \tag{39.19}$$

integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2y^5\,dA \\ &= \int_1^2\left(\int_0^1 x^2y^5\,dy\right)dx=\frac{7}{18} \end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$=\int_0^1\left(\int_1^2 x^2y^5\,dx\right)dy=\frac{7}{18}$$

Örnek 39.5.

$$f(x,y)=2 \tag{39.20}$$

fonksiyonunun $D=\{(x,y):\ 2\le x\le 4; 3\le y\le 4\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\iint_D 2\,dA=\int_3^4\int_2^4 2\,dx\,dy=2\int_3^4 4\,dy=8$$

Örnek 39.6.

$$f(x,y)=6xy^2 \tag{39.21}$$

fonksiyonunun $D=\{[2,4]\times[1,2]\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm 1: $D=\{(x,y):\ (x,y)\in[2,4]\times[1,2]\}$ ise,

$$\begin{aligned} \int\int_D 6xy^2\,dA &= \int_2^4\int_1^2 (6xy^2)\,dy\,dx \\ &= \int_2^4 \left(2xy^3\right)\Big|_1^2\,dx \\ &= \int_1^4 14x\,dx \\ &= 7x^2\Big|_2^4 \\ &= 84 \end{aligned}$$

integrallerin sırasını değiştirirsek,

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}\int\int_D 6xy^2\,dA &= \int_1^2\int_2^4 (6xy^2)\,dx\,dy\\ &= \int_1^2 \left(3x^2y^2)\right|_2^4 dy\\ &= \int_3 6y^2\,dy\\ &= 12y^3\Big|_1^2\\ &= 84\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 39.7.

$$f(x,y) = 2x-4y^3 \tag{39.22}$$

fonksiyonunun $D=\{[-5,4]\times[0,3]\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}\int\int_D 2x-4y^3\,dA &= \int_{-5}^4\int_0^3 (2x-4y^3)\,dy\,dx\\ &= \int_{-5}^4 (2xy-y^4)\Big|_0^3 dx\\ &= \int_{-5}^4 (6x-81)\,dx\\ &= (3x^2-81x)\Big|_{-5}^4\\ &= -756\end{aligned}$$

Örnek 39.8.

$$f(x,y=6xy, \tag{39.23}$$

fonksiyonunun $A=\{(x,y):\ 0\le x\le 2; 0\le y\le x^2\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}\int\int_A f(x,y)\,dA &= \int_0^2\int_0^{x^2} 6xy\,dy\,dx\\ &= \int_0^2 (3xy^2\Big|_{y=0}^{x^2} dx\\ &= \int_0^2 3x^5\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^6\Big|_0^2\\ &= \frac{1}{2}(64)-\frac{1}{2}(0)\\ &= 32\end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
\int\int_A f(x,y)\,dA &= \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 6xy\,dx\,dy \\
&= \int_0^4 \left(3xy^2\Big|_{y=0}^{x^2}\,dy\right. \\
&= \int_0^4 3x2y\Big|_{y=0}^{2}\,dx \\
&= \int_0^4 3x^2y\,dy\Big|_{\sqrt{y}}^{2} \\
&= \int_0^4 (12y-3y^2)\,dy \\
&= (6y^2-y^3)\Big|_0^4 \\
&= (6(4^2)-4^3)-6(0^2-0^2) \\
&= 32
\end{aligned}$$

Örnek 39.9.

$$f(x,y) = 6x^2y \tag{39.24}$$

fonksiyonunun $D = \{(x,y):\ -1 \le x \le 3; 0 \le y \le 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\int_{-1}^3 \int_0^1 6x^2y\,dy\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^3 3x^2y^2\Big|_{y=0}^{1}\,dx \\
&= \int_{-1}^3 3x^2\,dx \\
&= x^3\Big|_{-1}^{3} \\
&= 28
\end{aligned}$$

Örnek 39.10.

$$f(x,y) = 6x^2y \tag{39.25}$$

fonksiyonunun $D = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1; -1 \le y \le 3\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\int_0^1 \int_{-1}^3 6x^2y\,dy\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 3x^2y^2\Big|_{-1}^{3} \\
&= \int_0^1 (27x^2-3x^2)\,dx \\
&= \int_0^1 24x^2\,dx \\
&= \frac{24}{3}x^3\Big|_0^1 \\
&= 8x^3\Big|_0^1 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Örnek 39.11.

$$f(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x+y^2}} \tag{39.26}$$

fonksiyonunun $D=\{(x,y):\ 1\le x\le 4; 0\le y\le 2\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
\int_1^4\int_0^2 \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}\,dydx &= \int_1^4\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}\right)dx\\
&= 2\,(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})\Big|_1^4\\
&= 2\left(\sqrt{8}-\sqrt{4})-(\sqrt{5}-\sqrt{1})\right)\\
&= 2\left((2\sqrt{2}-2-\sqrt{5}+1)\right)\\
&= 2\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}-1\right)
\end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_1^4 \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}\,dxdy &= \int_0^2 2y\left(\sqrt{4+y^2}-\sqrt{1+y^2}\right)dy\\
&= 2\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}-1)\right)
\end{aligned}$$

Örnek 39.12.

$$f(x,y)=xy \tag{39.27}$$

fonksiyonunun $D=\{(x,y):\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3)\}$, *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}
=\int\int_D xy\,dA &= \int_0^1\int_0^3 xy\ dydx\\
&= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\Big|_0^3\ dx\\
&= \int_0^1 x(\frac{9}{2}-0)\ dx\\
&= \frac{9}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Örnek 39.13.

$$f(x,y)=\sqrt{xy} \tag{39.28}$$

fonksiyonunun $D=\{(x,y):1\le x\le 4,\ 4\le y\le 9\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^4 \int_4^9 \sqrt{xy}\, dydx \\
&= \int_1^4 \int_4^9 \sqrt{x}\,\sqrt{y}\, dy\, dx \\
&= \int_1^4 \sqrt{x} \int_4^9 \sqrt{y}\, dydx \\
&= \frac{2}{3}\int_1^4 \sqrt{x y^3}\Big|_4^9 dx \\
&= (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})19\,\sqrt{x^3}\Big|_1^4 \\
&= (\frac{4}{9})19(8-1) \\
&= \frac{532}{9}
\end{aligned}
$$

Örnek 39.14.

$$f(x,y) = ye^x \tag{39.29}$$

fonksiyonunun $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{-1}^1 ye^x\, dydx &= \int_0^2 e^x \frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^1 dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\int_0^2 e^x dx \\
&= 0 \\
\int_{-1}^1 \int_0^2 ye^x\, dx\, dy &= \int_{-1}^1 ye^x\Big|_{x=0}^2 dx \\
&= \int_{-1}^1 y(e^2-1)dy \\
&= (e^2-1)\frac{y^2}{2}\Big|_{y=-1}^1 \\
&= (e^2-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki integrallerde integral sırası önem kazanmaktadır. Hesabı kolaylaştıran integral sırasını belirleyerek integrali hesaplayınız.

a) $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2)\}$, $\int\int_D xe^{xy} dA$

$$
\begin{aligned}
\int\int_D xe^{xy}dA &= \int_0^1\int_1^2 xe^{xy}\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 x\left(\int_1^2 e^{xy}\,dy\right)dx \\
&= \int_0^1 \left(e^{2x}-e^x\right)dx \\
&= \frac{e^{2x}}{2}-e^x\Big|_0^1 \\
&= \left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right) \\
&= \frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

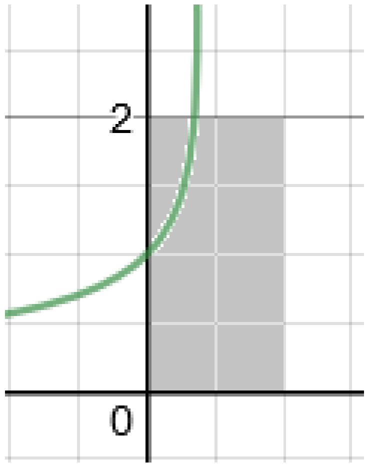
b)$D=\{(x,y):0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ bölgesi üzerinde

$$\int\int_D \frac{x}{1+xy}dA\}$$

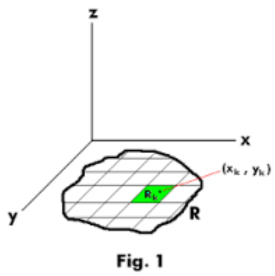
integralini hesaplayınız.

$u=1+xy, du=xdy$ konumuyla;

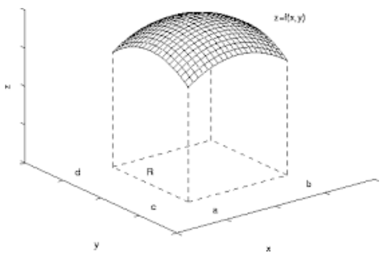
$$
\begin{aligned}
\int\int_D \frac{x}{1+xy}dA &= \int_0^1 ln(1+xy)|_0^1\,dx \\
&= \int_0^1 [ln(1+x)-ln1]dx \\
&= \int_0^1 ln(1+x)dx \\
&= (x+1)\,(\ln(x+1)-1)|_0^1 \quad = 2\,(\ln 2-1)-(1).(-1) = 2\ln 2-2+1
\end{aligned}
$$

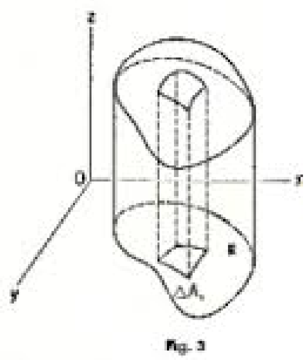


Şekil 39.6: Bölüntü



Şekil 39.7: Bölüntü


Şekil 39.8: Yüzey Altında Hacim



Şekil 39.9: Sütünların Oluşumu

Verilen denklemlerin grafikleri ile sınırlanan bölgeyi grafikle gösteriniz ve küme gösterimiyle, düzgün x-bölgesi (Tip I) ve/veya düzgün y-bölgesi (Tip II) olarak ifade ediniz.

a) $y=5-x^2, y=1$

$$
\begin{aligned}
D &= \{(x,y)|-2\le x\le 2,\quad 1\le y\le 5-x^2\} \\
&= \{(x,y)|1\le y\le 5,\quad -\sqrt{5-y}\le x\le \sqrt{5-y}\}
\end{aligned}
$$

b) $y=x^2, y=4$

$$
\begin{aligned}
D &= \{(x,y)|-2\le x\le 2,\quad x^2\le y\le 4\} \\
&= \{(x,y)|\,0\le y\le 4,\quad -\sqrt{y}\le x\le \sqrt{y}\}
\end{aligned}
$$

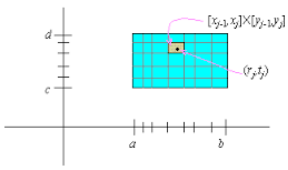
c) $y=x^2-6x+8,\ x+y=8$

$$
\begin{aligned}
D &= \{(x,y)|y=x^2-6x+8,\ x+y=8\} \\
&= \{(x,y):\ 0\le x\le 5,\ x^2-6x+8\le y\le 8-x\} \\
&= \{(x,y):\ -1\le y\le 3, 3-\sqrt{1+y}\le x\le 3+\sqrt{1+y} \\
&\cup \{(x,y):\ 3\le y\le 8, 3-\sqrt{1+y}\le x\le 8-y\}
\end{aligned}
$$

d)

$$y = 5 + 4x - x^2, \ x + y = 5$$

$$\begin{aligned} y &= 5 + 4x - x^2, \ x + y = 5 \\ &\Rightarrow x^2 - 5x \\ &\Rightarrow x(x-5) = 0 \\ &\Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 5 \end{aligned}$$



Şekil 39.10: Bölüntü

$$D = \{(x, y)|0 \le x \le 5, \quad -x + 5 \le y \le 5 + 4x - x^2\}$$

Köşeleri $(1,1), (3,3), (4,3)$ ve $(5,2)$ noktalarında olan dörtgensel bölge D olsun. D yi sadece sınır noktalarında ortak noktaları bulunan düzgün bölgelerin birleşimi olarak ifade ediniz.

a) $\int\int_D 24x dA$

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ alınırsa,

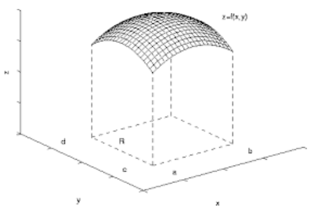
$$\begin{aligned} \int\int_D 24x dA &= \int\int_{D_1} 24x dA_1 + \int\int_{D_2} 24x dA_2 + \int\int_{D_3} 24x dA_3 \\ &= \int_1^3 \int_{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}^{x} 24x dy dx \end{aligned}$$

olur.

$D = D_4 \cup D_5$ alınırsa,

$$\begin{aligned} I = \int\int_D 24y dA &= \int\int_{D_4} 24y dA_4 + \int\int_{D-5} 24y dA_5 \\ &= \int_1^2 \int_y^{4y-3} 24y \, dx dy \\ &+ \int_3^3 \int_y^{7-y} 24y \, dx dy \end{aligned}$$

olur



Şekil 39.11: Riemann toplamı

İntegrasyon bölgesi verilmiş olan çift katlı integrali hesaplayınız.

a) $D = \{(x, y) : 0 \le y \le 2x, 0 \le x \le 2\}, \quad \int\int_D (x^2 + xy) dA$

$$\int_0^2 \int_0^{2x} (x^2 + xy) dy dx = 16$$

b) $D = \{(x, y) : \ 0 \le x \le y, 0 \le y \le 1\}, \quad \int\int_D (24xy^3) dA$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y 24xy^3 dx dy &= \int_0^1 12x^2 y^3 |_0^y dy \\ &= \int_0^1 12y^3 (y^2 - 0) dy \\ &= \int_0^1 12y^5 dy \\ &= 2y^6|_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

c) $D = \{(x, y) : \ y^2 \le x \le y, 0 \le y \le 1\}, \quad \int\int_D \sqrt{xy} dA$

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} \sqrt{xy}\, dx\, dy = \frac{2}{27}$$

ç) $D = \{(x, y) : 0 \le x \le y^2, 0 \le y \le 1\}$, $\int\int_D ye^x dA$

$$I = \int_0^1 \int_0^{y^2} ye^x dx dy \qquad = \int_0^1 e^x y\Big|_{x=0}^{y^2} dy$$
$$= \frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

d) $D = \{(x, y) : 0 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$, $\int\int_D e^{x+y} dA$

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{x+y} dy dx$$
$$I = \int_0^1 \int_0^x e^x . e^y dy dx$$
$$= \int_0^1 e^x . e^y\Big|_0^x \, dx$$
$$= \int_0^1 (e^{2x} - e^x)\, dx$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2}(e-1)^2$$

İNTEGRAL SIRASINI DEĞIŞTIRME

Aşağıdaki inegrallerde integrasyon bölgesinin grafiğini çizerek integral sırasını değiştiriniz.

a) $\int_0^1 \int_{x^4}^{x^3} f(x, y) dy dx$

$$I = \int_0^1 \int_{x^4}^{x^3} f(x, y) dy dx$$
$$= \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx dy$$

Aşağıdaki integralleri integrali sırasını değiştirerek hesaplayınız (integral sırasını değiştirmeden hesaplamayı denemeyiniz!)

a)

$$\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^y e^{y^2}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^1 e^{y^2}x\Big|_0^y dy$$
$$= \int_0^1 ye^{y^2}\,dy$$
$$= \frac{e^{y^2}}{2}\Big|_0^y$$
$$= \frac{e}{2}-\frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(e-1)$$

b)

$$\int_0^1\int_{y^2}^1 2ye^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} 2ye^{x^2}\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 12e^{x^2}\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{\sqrt{x}} dx$$
$$= 6\int_0^1 e^{x^2}x\,dx$$
$$= 3e^{x^2}\Big|_{x=0}^1$$
$$= 3(e-1)$$

c)

$$I = \int_0^2\int_{y^2}^4 \frac{4y}{1+x^2}\,dx\,dy$$
$$= \int_0^4 \frac{1}{1+x^2}2y^2\Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^4 \frac{2y^2}{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{x}} dx$$
$$= \int_0^4 \frac{2x}{1+x^2}dx$$
$$= ln(1+x^2)\big|_0^4$$
$$= ln(17)-ln(1)$$
$$= ln(17)$$

ç)

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 2\sqrt{1+2y^2}\,dy\,dx &= \int_0^2 \int_0^{2y} 2\sqrt{1+2y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 2\sqrt{1+2y^2}\,x\Big|_0^{2y}\,dy \\
&= \int_0^2 \sqrt{1+2y^2}\,4y\,dy \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{(1+2y^2)^3}\Big|_0^2 \\
&= \frac{2}{3}\left(\sqrt{9^3}-1\right) \\
&= \frac{2}{3}(26) \\
&= \frac{52}{3}
\end{aligned}$$

b) $\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x,y)\,dy\,dx$$

c) $\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} f(x,y)\,dy\,dx$

$$\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^8 \int_{y/4}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dy\,dx$$

ç) $\int_0^8 \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx\,dy$

$$\int_0^8 \int_{y/4}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_{2x^2}^{4x} f(x,y)\,dy\,dx$$

İntegrasyon bölgesi D verilen denklemlerin grafikleri ile sınırlanan çift katlı integrali hesaplayınız.

a) $D = \{(x,y):\ y = x^3, y = x^2\}$ ile sınırlı, $\int\int_D y^2\,dA$

$$\begin{aligned}
\int\int_D y^2\,dA &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y^2\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{x^3}^{x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 (x^6 - x^9)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10}\right]\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{70}
\end{aligned}$$

b) $D = \{(x,y):\ y^2 = 2x, y^2 = 8-2x$ ile sınırlı $\}$, $\int\int_D (4-y^2)\,dA$

$$\int\int_D (4-y^2)dA = 2\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x}} (4-y^2)dydx$$
$$+2\int_2^4\int_0^{\sqrt{8-2x}} (4-y^2)dydx$$
$$=2\left(\frac{128}{15}+\frac{128}{15}\right)$$
$$=\frac{512}{15}$$

c)
$D=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ 2y\le x\le 2$

$$\int\int_D e^{x^2}dA = \int_0^2\int_0^{x/2} e^{x^2}dydx$$
$$=\int_0^2 e^{x^2}y\Big|_0^{x/2}dx$$
$$=\int_0^2 e^{x^2}\frac{x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 xe^{x^2}dx$$
$$=\frac{1}{4}(e^4-1)$$

ç) $D=\{(x,y): x=0, x=2y, y=1\}$ ile sınırlı bölge, $\int\int_D e^{-\frac{y}{2}}dA$

$$\int\int_D e^{-\frac{y}{2}}dA = \int_0^2\int_{x/2}^1 e^{-\frac{y}{2}}dydx$$
$$=\int_0^2 -2e^{-y/2}\Big|_{x/2}^1 dx$$
$$=-2\left(\int_0^2 e^{-1/2}-e^{-x/4}\right)dx$$
$$=-2\left(\int_0^2 xe^{-1/2}+4e^{-x/2}\right)_0^2 dx$$
$$=-2\left[\left(\frac{2}{\sqrt{e}}+\frac{4}{e}\right)-(0+4)\right]$$
$$=8-\frac{4}{\sqrt{e}}-\frac{8}{e}$$
$$=\frac{8e-4\sqrt{e}-8}{e}$$

39.3 Katlı İntegral Uygulamaları

NEDEN İNTEGRAL SIRASINI DEĞIŞTIRIYORUZ?

Katlı integrali ardışık integral (iterated) haline getirebidiğimiz durumlarda, birisini öne ya da sona almak çoğu kez önem taşımaz. Ama bazı durumlarda birisini öne almanın kolaylık sağladığı görülebilir. Bununla ilgili bazı örnekler vereceğiz.

Teorem 39.15. *$D=\{a\le x\le b; g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$ bölgesi üzerinde $f(x,y)$*

fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

olur.

Değişkenlerin yerleri değiştirilirse, benzer sonuç elde edilebilir:
$D = \{c \le y \le d; h_1(y) \le y \le h_2(y)\}$ bölgesi üzerinde $f(x,y)$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

olur.

İspat: Ardışık integral tanımından çıkarılır.

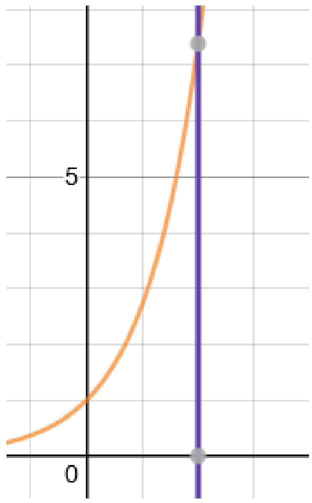
Örnek 39.16. $D = \{y = 0, y = 2x, x = 1\}$ *doğruları ile sınırlı bölge ise*

$$\iint_D (x+y)\,dA \tag{39.30}$$

integralini bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x+y)\,dA \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x+y)\,dy \right) dx = \frac{4}{3} \\ &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 (x+y)\,dx \right) dy = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



Şekil 39.12: D={$0 \le x \le 2$, $0 \le y \le e^x$

Örnek 39.17.

$$I = \int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştiriniz.

Çözüm :

$$I = \int_1^{e^2} \int_{lny}^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

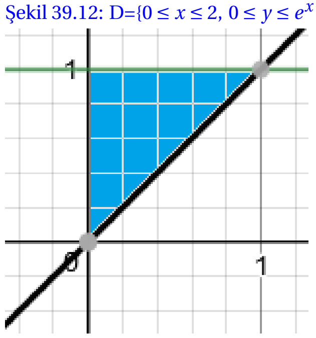
Örnek 39.18.

$$I = \int_{-1}^2 \int_{x^2-2}^x f(x,y)\,dy\,dx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştiriniz.

Çözüm :

$$I = \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{y+2}}^{\sqrt{y+2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-1}^2 \int_y^{\sqrt{y+2}} f(x,y)\,dy\,dx$$



Şekil 39.13: $0 \le x \le 1$, $y = x$

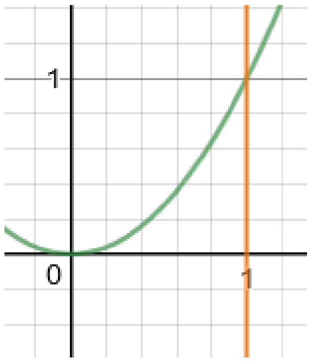
Örnek 39.19.

$$I = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx$$

integralini hesaplayınız..

Çözüm :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dx dy \\
&= \int_0^1 y e^{y^2}\, dy \\
&= \frac{e-1}{2}
\end{aligned}
$$



Şekil 39.14: $0 \le x \le 1 \quad y = x^2$

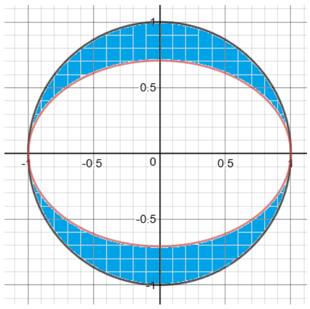
Örnek 39.20.

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y)\, dy dx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)\, dx dy \\
&= \frac{7}{20}
\end{aligned}
$$



Şekil 39.15: $x^2 + y^2 = 1 \quad x^2 + 2y^2 = 1$

Örnek 39.21. *D bölgesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ile $x^2 + 2y^2 = 1$ elipsi ile sınırlı bölge ise*

$$I = \iint_D x^2\, dA$$

integralini hesaplayınız.

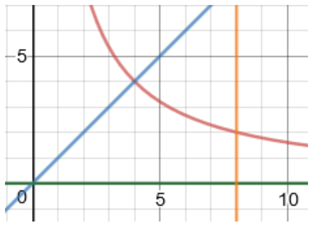
Çözüm : şekilden görüldüğü gibi $D = D_1 \cup D_2$ olarak iki parçaya ayırmalıyız.

$$
\begin{aligned}
I = \iint_D x^2\, dA &= \iint_{D_1} x^2\, dA + \iint_{D_2} x^2\, dA \\
&= \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\, dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} x^2\, dy dx \\
&= 2\int_{-1}^1 x^2 \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x^2}{2}} \right) dx \\
&= 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx \\
&= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2}\, dx, \qquad (x = sint, dx = costdt) \\
&= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \int_0^{\pi/2} sin^2 t cos^2 t dt \\
&= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} sin^2 2t dt \\
&= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - cos4t) dt \\
&= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{8} \left(t - \frac{sin4t}{4} \right|_0^{\pi/2} \\
&= 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\pi}{16} \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{4\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

Örnek 39.22. *D bölgesi birinci dörtte birlik alanda $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8$ eğrileri ile sınırlı bölge ise*

$$I = \iint_D x^2 dA$$

integralini hesaplayınız.



Şekil 39.16: $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8$

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
I = \iint_D x^2 dA &= \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\
&= \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2 dx dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2 dx dy \\
&= \frac{1}{3} \int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3}\right) dy + \frac{1}{3} \int_0^2 (8^3 - y^3) dy \\
&= 448
\end{aligned}$$

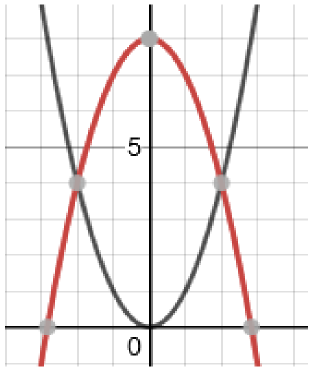
Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
I = \iint_D x^2 dA &= \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\
&= \int_0^4 \int_0^x x^2 dy dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2 dy dx \\
&= 448
\end{aligned}$$

Örnek 39.23. *D bölgesi $y = x^2, y = 8 - x^2$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.*

$$Alan A = \iint_D dA$$

integralini hesaplayınız.



Şekil 39.17: $y = x^2, y = 8 - x^2$

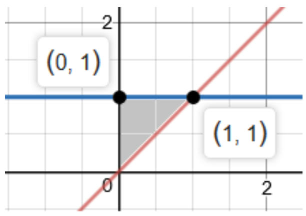
Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
I = \iint_D x^2 dA &= \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\
&= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} dy dx \\
&= \int_{-2}^2 \left((8 - x^2) - x^2\right) dx \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

Örnek 39.24.

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \tag{39.31}$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 0 \le x \le y; 0 \le y \le 1\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.



Şekil 39.18: $D = \{(X, y) : 0 \le x \le y; 0 \le y \le 1\}$

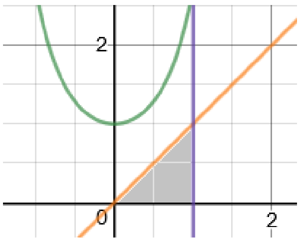
Çözüm:

$$\begin{aligned}\int\int_D e^{\frac{x}{y}}\, dA &= \int_0^1 \int_0^y e^{\frac{x}{y}}\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 (ye^{\frac{x}{y}}\Big|_0^y)\, dy \\ &= \int_0^1 (ye - y)\, dy \\ &= (e-1)\int_0^1 y dy \\ &= \frac{1}{2}(e-1)y^2\Big| t_0^1 y d y \\ &= \frac{1}{2}(e-1)\end{aligned}$$

Burada intgralin sırasını değiştirirsek $\int \frac{x}{y} dy$ integralini hesaplayamayız.

Örnek 39.25.

$$f(x,y) = e^{x^2} \tag{39.32}$$



Şekil 39.19: $D = \{0 \le y \le x; 0 \le x \le 1\}$

fonksiyonunun $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x; 0 \le x \le 1\}$ *bölgesi üzerinden integralini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned}\int\int_D e^{x^2}\, dA &= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 (ye^{x^2}\Big|_0^x)\, dx \\ &= \int_0^1 \left(xe^{x^2}\right) dx, \qquad (u = x^2, du = 2x dx) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 e^u du \\ &= \frac{1}{2}(e-1)\end{aligned}$$

Burada intgralin sırasını değiştirirsek

$$\int e^{x^2}\, dx$$

integralini hesaplayamayız.

39.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki katlı hesaplayınız.

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dydx$
2. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 cosy^3\,dydx$
3. $\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2\,dxdy$
4. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)\,dydx$
5. $\int_0^4 \int_y^{2y} (x+e^y)\,dxdy$
6. $\int_{-1}^2 \int_x^{x^2+1} (xy)\,dydx$
7. $\int_0^{1/2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dxdy$
8. $\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} x^2y\,dydx$
9. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x-y)\,dxdy$
10. $\int_0^1 \int_0^{2y} e^{-y^2}\,dxdy$
11. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dydx$
12. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dxdy$

39.5 Katlı integralde değişken değiştirme

Tek değişkenlilerde olduğu gibi, bazı durumlarda değişken değiştirerek katlı integral daha kolay hesaplanabilir hale dönüştürülebilir. Aslında katlı integrali ardışık integraller olarak hesaplanabildiğine göre, değişken değiştirimi tek değişkenli integrallerde yaptığımızın tekrarı olacaktır. Yine de bu dönüşümün yapılabilmesini mümkün kılan teoremi ifade etmekte yarar vardır.

Teorem 39.26. *1. $f(x,y)$ fonksiyonu xy-düzlemindeki bir D bölgesinde sürekli olsun.*

2. Düzlemde tanımlı bir T dönüşümü

$$T : \begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

parametrik biçiminde verilsin.

3. g ve h fonksiyonları D^* üzerinde sürekli olsunlar.

4. T dönüşümü bire-bir örten olacak biçimde D bölgesini D^* bölgesine dönüştürsün.

5.

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix} \tag{39.33}$$

6. $J(u,v)\neq 0$

varsayıları sağlanıyorsa

$$\iint_D f(x,y)\,dy\,dx=\iint_{D^*} f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv \tag{39.34}$$

dir.

İspat: T dönüşümü uv-düzlemindeki bir (u,v) noktasını xy-düzlemindeki (x,y) noktasına götüren dönüşümdür. g,h fonksiyonları D^* bölgesinde tanımlı ve sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır. T dönüşümünü vektör değerli bir fonksiyon imiş gibi düşünebiliriz. $(0,0)$ baş noktasını (x,y) noktasına birleştiren vektörü $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ ya da $\vec{r}=g(u,v)\vec{i}+h(u,v)\vec{j}$ biçiminde yazabilirz. g,h fonksiyonları süreli türevlere sahip olduğuna göre $\frac{\partial g}{\partial u},\frac{\partial g}{\partial v},\frac{\partial h}{\partial u},\frac{\partial h}{\partial v}$ kısmi türevleri var ve süreklidirler. $u=u_0$ ve $v=v_0$ eğrileinin teğet vektörleri $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ olacaktır.

T dönüşümü altında boyutları $\Delta u\times\Delta v$ olan dikdörtgen xy-düzleminde biçemi bozulmuş dikdörtgenimsi bir bölgeye dönüşür. Bunun alanı yaklaşık olarak,

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v$$

olur. Ayrıca,

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=k\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

olur. Buradan,

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\Delta u\Delta v$$

elde edilir. Şimdi integral tanımına dönersek,

$$\sum f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv$$

toplamının limiti varsa, bu limit

$$\iint_D f(x,y)\,dy\,dx$$

integraline eşit olacaktır. O halde,

$$\iint_D f(x,y)\,dy\,dx=\iint_{D^*} f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv \tag{39.35}$$

çıkar. Simgelerde birliği sağlamak için,

$$\begin{aligned} dA &= dx\,dy\\ &=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv\end{aligned}$$

olduğunu vurgulamak yeterlidir.

Örnek 39.27. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ *ile sınırlı D bölgesinin alanını değişken değiştirme yöntemi ile bulunuz.*

Çözüm:$x = au,\ y = bv$ değişken değiştirimini yaparsak, D bölgesi $u^2+v^2 \leq 1$ açık diskine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (39.33) uygulanabilir. ($a >$ $0,\ b > 0$ olmak üzere

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \left|\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right| = ab\, dudv$$

olur. Dolayısıyla,

$$\iint_D 1\, dxdy = \iint_{D^*} ab\, dudv = ab(\pi 1^2) = \pi abbr^2$$

çıkar.

Örnek 39.28. *Köşeleri* $(0,0),(1,1),(2,0)$ *olan D üçgeninin üzerinde,*

$$\iint_D (x+y)^3\, dxdy$$

integralini değişken drğiştirimi yaparak bulunuz.

Çözüm:$u = y-x,\ v = y+x$ değişken değiştirimini yaparsak, D bölgesi köşeleri $(0,0),(0,2),(-2,2)$ olan D^* üçgenine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (39.33) uygulanabilir.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2$$

dir. Buradan,

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \frac{1}{2}\, dudv$$

$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)^3\, dxdy &= \iint_{D^*} \frac{1}{2} v^3\, dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{-v}^0 v^3\, dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 v^4\, dv \\ &= \frac{16}{5}\end{aligned}$$

Örnek 39.29. *Köşeleri* $(0,0),(1,1),(2,0)$ *olan D üçgeninin üzerinde,*

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dxdy$$

integralini değişken drğiştirimi yaparak bulunuz.

Çözüm:

$$u = y-x,\ v = y+x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u+v),\ y = \frac{1}{2}(v-u) \Rightarrow u = v, u = -v, v = 2)$$

D bölgesi köşeleri $(0,0),(2,2),(-2,2)$ olan D^* üçgenine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (39.33) uygulanabilir.

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy &= \iint_{D^*} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}}\,dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,dudv \\ &= \frac{e-\frac{1}{e}}{2}\int_0^2 v\,dv \\ &= e-\frac{1}{e}\end{aligned}$$

39.6 Alıştırmalar

1. Köşeleri $(1,0),(2,0),(0,-2),(0,-1)$ olan D yamuğu üzerinde,

$$\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dxdy$$

integralini bulunuz.

2. $x-2y=0, x-2y=4, 3x-y=1, 3x-y=8$ doğrularının sınırladığıD bölgesi üzerinde,

$$\iint_D \frac{x-2y}{3x-y} dA$$

integralini hesaplayınız.

3. Köşeleri $(1,0),(2,0),(0,2),(0,1)$ olan D yamuğu üzerinde,

$$\iint_D \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$$

integralini hesaplayınız.

4. $D=\{(x,y): \quad \pi<x+y<2\pi,\ -\pi<x-y<\pi\}$ bölgesi üzerinden,

$$\iint_D (x^2-y^2)\sin^2(x+y)\,dxdy$$

integralini hesaplayınız.

5. $9x^2+4y^2=1$ elipsi üzerinden,

$$\iint_D \sin(9x^2+4y^2)dA$$

integralini hesaplayınız.

6. $|x|+|y|\le 1$ eitsizliği ile belirlenen D bölgesi üzerinden,

$$\iint_D e^{x+y} dA$$

integralini hesaplayınız.

7. Köşeleri $(0,0),(2\pi,0),(0,\pi)$ olan D üçgeni üzerinden,

$$\iint_D \sin(x+2y).\cos(x-2y)dA$$

integralini hesaplayınız.

8. $y = x^2, y = 4x^2, xy = 1, xy = 5$ eğrilerinin sınırladığı D bölgesi üzerinden,

$$\iint_D xy\,dA$$

integralini hesaplayınız.

39.7 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı

1. Pappus teoremini kullanarak dik dairesel koninin yanal yüzeyinin alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm:

Genel olması için koninin yüksekliği olarak herhangi bir r sayısı alalım. Koninin simetri doğrusu $Oy-$ ekseni olacak şekilde tepe noktasını (O,O) başlangıç noktasına koyalım. Koni şekilde görüldüğü gibi baş aşağı konumlanmış olsun.

Koninin yanal yüzeyindeki $|OB|$ doğru parçasını kütle merkezi, $|OB|$ bin orta noktasıdır: $(\overline{x},\overline{y}) = (\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}h)$ dir (bkz.). Alan

$$\begin{aligned} A &= |OB|.2\pi R = 2\sqrt{r^2+h^2}.\pi\frac{r}{2} \\ &= \pi r\sqrt{r^2+h^2} \end{aligned}$$

OAB üçgeninin kütle merkezi $(\frac{r}{3}, \frac{h}{2})$ dır. Hacim

$$V = (2\pi R)\frac{rh}{2} = 2i\frac{r}{3}.\frac{rh}{2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

olur.

2. Pappus'un ikinci teoremini kullanarak $y = \sqrt{r^2-x^2}, -r \le x \le r$ yayının kütle merkezini bulunuz.

Çözüm:

Pappus'un ikinci teoremini kullanacağız. Kürenin alanının $4\pi r^2$ olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$\overline{x} = 0, \tag{39.36}$$

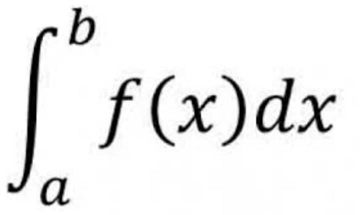
$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{\int \tilde{y}dm}{ydm} \\ &= \frac{\int \sqrt{r^2-x^2}.\sqrt{-t}1+y^2\,dx}{ds} \\ &= \frac{\int \sqrt{r^2-x^2}.\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}\,dx}}{\int \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx} \\ &= \frac{\int_{-r}^{r} r\,dx}{\int_{-r}^{r}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx} \\ &= \frac{2r^2}{\pi r} \\ &= \frac{2r}{\pi} \end{aligned}$$

Yüzey Alanı S:

$$S = (r\pi)2\pi(\frac{2r\pi}{)} = 4\pi r^2 \tag{39.37}$$

çıkar. Buunu daha kısa yolla yapabiliriz.

$$4\pi r^2 = (r\pi)2\pi\overline{y}$$
$$\Rightarrow \overline{y} = \frac{2}{\pi}r$$

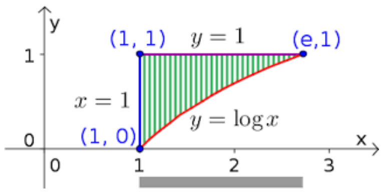


Şekil 39.20: Soru7-11a

Verilen iki denklemin grafikleri arasında kalan bölgenin alanını çift katlı integralle hesaplayınız.

a) $y = \frac{x^2}{4}, y = \frac{1}{2}x + 2$

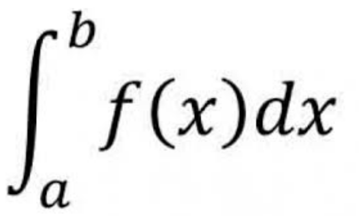
$$\begin{aligned} Alan &= \int_{-2}^{4}\int_{x^2/4}^{2+x/2} dydx \\ &= \int_{-2}^{4}\left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4}\right)dx \\ &= (4 + 8 - \frac{64}{8}) * (1 - 4 + \frac{8}{12}) \\ &= 15 - 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$



Şekil 39.21: $xy = 5, x + y = 6$

b) $xy = 5, x + y = 6$

$$\begin{aligned} Alan &= \int_{1}^{5}\int_{5/x}^{6-x} dydx \\ &= \int_{1}^{5}\left((6-x) - \frac{5}{x}\right)dx \\ &= (6 - \frac{x^2}{2} - 5ln(x))\Big|_{1}^{5}) \\ &= (30 - \frac{25}{2} - 5ln5) - (6 - \frac{1}{2} - 5ln1) \\ &= 30 - 18 - 5ln5 \\ &= 12 - 5ln5 \\ &= 9 \end{aligned}$$



Şekil 39.22: $y = x, y = x^3$

c) $y = x, y = x^3$

$$\begin{aligned} Alan &= 2\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} dydx \\ &= 2\int_{0}^{1}\left((x - x^3)\right)dx \\ &= 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)_{0}^{1} \\ &= 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Örnek

r yarıçaplı bir çember, çember düzleminde ve çember merkezine $b,(b>r)$ uzaklıkta sabit duran bir eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin (simit, torus, daughnut) yüzey alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm:

Çemberin ağırlık merkezi kendi merkezidir. Çemberin merkezi eksen etrafında bir dönüş yapınca $2\pi b$ kadar yol alır. Çemberin alanı πr^2 dir. Pappus teoremine göre hacim

$$V=(2\pi b)(\pi r^2)=2\pi^2 br^2$$

olur, yüzey alanı ise

$$S=(2\pi b)(2\pi r)=4\pi^2 br$$

olur.

39.8 Alıştırmalar

1. $x=a, y=a$ karesinden a yarıçaplı çember çıkarılıyor. Geri kalan düzlemsel bölgenin alanını bulınız.

2. $y=x^3, x=1, x=2, y=x$ eğrileri ile sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

3. ,

$$\int_0^1\int_{2x}^2 e^{y^2}\,dydx$$

integralini hesaplayınız.

4.

$$\int_0^2\int_{y^2}^4 y\cos x^2\,dxdy$$

integralini hesaplayınız.

5.

$$\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{(16+x^7)}}$$

6.

$$\int_0^2\int_{y^2}^4 y\cos x^2\,dxdy$$

integralini hesaplayınız.

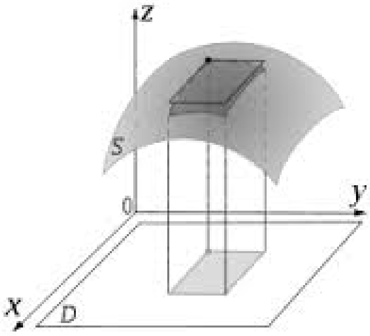
7. $y=\frac{x^3}{3}, y=x+4, y=-4x+9$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

8. $x^2+z^2=9$ silindirini $y=2x$ düzlemi kesiyor. Birinci bölgede silindirden ayrılan parçanın hacmini bulunuz.

9. $x=-y^2, y-x=2$ eğrileri ile sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

39.9 İki Katlı İntegral İle Hacim hesapları

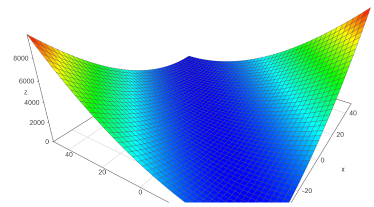
Bu kesimde iki ya da daha çok yüzey ile sınırlanan hacimleri hesaplayacağız. Uygulamada çoğunlukla yüzeylerden birisi xy-düzleminde düzgün eğrilerle sınırlanmış düzlemsel bir bölge olur ve yanal yüzeyler sözkonusu bölgenin sınırlarını doğrultman olarak kabul eden ve ayrıtları düzlemsel bölgeye dik olan bir silindirdir. Silindirin bir kapağı düzlemsel bölgedir, öteki kapak silindir ile başka bir yüzeyin arakesiti tarafından belirlenir.



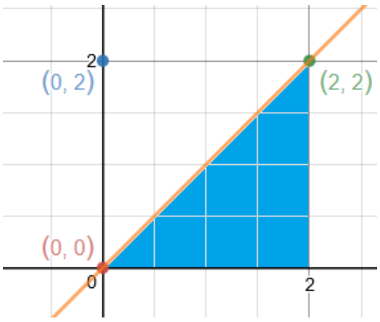
Şekil 39.23: Yüzeyler arasındaki hacim

Örnek 39.30. *Köşeleri (0,0), (0,1), (1,0) olan D üçgeni ile $z = x + y$ yüzeyi arasındaki hacmi bulunuz.*

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D (x+y)\,dA \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{-x^2}{2} + \frac{1}{2}\right] dx \\
&= \frac{-x^3}{6} + \frac{x}{2}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{12} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

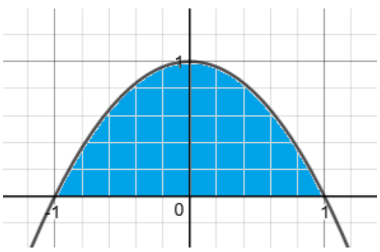


Şekil 39.24: $z = (x - y)^2$ yüzeyi



Şekil 39.25: Üçgen köşeleri:$(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$

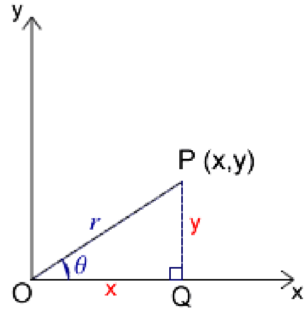
$y = 1 - x^2$ ve $y = 0$ ile sınırlanan D bölgesi ile $z = 4$ düzlemi arasında kalan hacim.



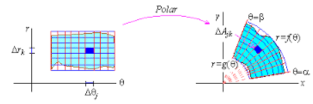
Şekil 39.26: Köşeleri: $y = 1 - x^2$

$$
\begin{aligned}
V &= \int\int_D 4\,dA \\
&= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} 4\,dy\,dx \\
&= \int_{-1}^1 4y\Big|_{y=0}^{1-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^1 4(1-x^2)\,dx \\
&= \int_{-1}^1 (4-4x^2)\,dx \\
&= 2(4x - \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 \\
&= \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

39.10 Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller



Şekil 39.27: Kutupsal koorinatlar



Şekil 39.28: Dönüşüm

Kutupsal koordinatlara dönüşümü incelerken

$$T : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

dönüşümü ile xOy- dikey kartezyen koordinat sisteminden (r,θ) kutupsal koordinat sitemine nasıl dönüşüm yapıldığını incelemiştik. Bu kesimde, bu dönüşümün katlı integrallerde kullanılışını ele alacağız.

$$r^2 = x^2 + y^2,\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

ve

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}\right| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{matrix}\right\| = r$$

çıkar. Öyleyse aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz:

Teorem 39.31. *$D = \{(r,\theta) | \quad a \le r \le b, \alpha\, \theta \le \beta, \quad 0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$ bölgesinde f fonksiyonu sürekli ise*

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr d\theta \tag{39.38}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Önceki kesimde ifade edilen dnüşüm Teorem'inin varsayımları sağlandığından, sözkonusu teoremin burada geçerli olacağı açıktır. □

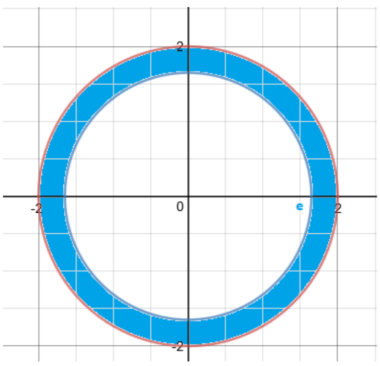
Örnek 39.32. *$x^2 + y^2 \le 4$ kapalı diski üzerindeki*

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right|_0^2 \\ &= 12\pi \end{aligned}$$



Şekil 39.29: Halka bölge

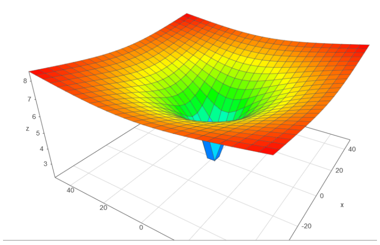
Örnek 39.33. *$x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = e^2$ çemberleri arasında kalan D halka bölgesi üzerindeki*

$$\iint_D ln(x^2 + y^2) dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \iint_D ln(x^2 + y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_2^e ln(r^2) r dr d\theta \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{2} r^2 ln r - \frac{1}{4} r^2 \right)\Big|_2^e \\ &= \pi(e^2 + 4 - 8ln2) \end{aligned}$$


Şekil 39.30: $ln(x^2 + y^2$ yüzeyi

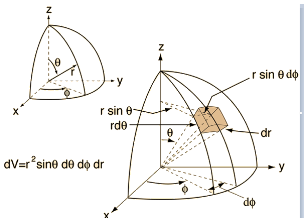
Teorem 39.34.

$$R = \{(r,\theta) | \quad \alpha \le \theta \le \beta, \quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), r_1(\theta) \ge 0, r_2(\theta) \ge 0\}$$

bölgesinde f fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_R f(r,\theta)\, dA = \int \alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r\, dr d\theta \tag{39.39}$$

eşitliği sağlanır.



Şekil 39.31: Kürenin hacmi

Örnek 39.35. *a yarıçaplı kürenin hacmini kutupsal koordinatları kullanarak hesplayınız.*

Çözüm: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin xy-düzleminin üstünde kalan yarısını hacmini bulup çıkanı 2 ile çarpabiliriz.

$$z \ge 0, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

dir. Yarı kürenin xy düzlemi üzerindeki izdüşümü

$$D = \{(x,y) | \quad x^2 + y^2 \le a^2$$

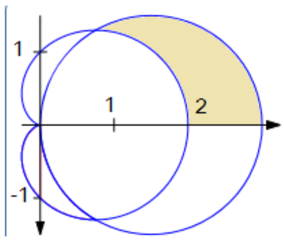
ir. Buradan,

$$\begin{aligned}
V &= 2\iint_D \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)}\, dy dx = 2\int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r\, dr d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right)\Big|_0^a d\theta \\
&= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left((a^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2 - 0^2)^{\frac{3}{2}} \right) d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} a^3\theta\, d\theta \\
&= \frac{2}{3}\,(a^3\theta|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned}$$

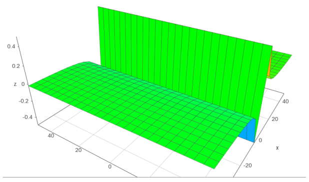
Örnek 39.36. *D bölgesi birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgede $r = 3\cos\theta$ diskinden, $r = 1 + \cos\theta$ kalp eğrisi (cardioid) atılınca geri kalan bölge olsun.*

$$\iint_D \frac{1}{x} dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.



Şekil 39.32: Alan


Şekil 39.33: $z = \frac{1}{x}$ yüzeyi

Çözüm: $3\cos\theta = 1 + \cos\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 1, \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{1}{x} dA &= \int_0^{\pi/3} \int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \frac{1}{r\cos\theta} r\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} \int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \sec\theta\, dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} r\sec\theta|_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} (3\cos\theta\sec\theta - (1+\cos\theta)\sec\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} (2 - \sec\theta) d\theta \\
&= 2\theta - ln|\sec\theta + \tan\theta||_0^{\pi/3} \\
&= \frac{2\pi}{3} - ln(2 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

Örnek 39.37. *D bölgesi birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgesi olsun. Bu sınırsız bölgede,*

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm: Bu has olmayan bir integraldir. Öyleyse, Kutupsal koorinat sistemine geçerek,

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dA &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\int_0^n e^{-r^2} r\,dr d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^n\right) d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{2}e^{-n^2}+\frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-e^{-n^2}\right).\theta\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-n^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Örnek 39.38.

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$I_a=\int_0^a e^{-x^2} dx$$

dersek, değişken adını serbestçe seçebildiğimizi de düşünerek,

$$\begin{aligned}
(I_a)^2 &= \left(\int_0^a e^{-x^2} dx\right)\left(\int_0^a e^{-y^2} dy\right) \\
&= \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{(önceki problemden)}
\end{aligned}$$

çıkar. Önceki problemin sonucunun bilinmediğini, varsayarak çözümü bulabiliriz. Şimdi, birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgede R_1 bölgesi a yarıçaplı disk, R bölgesi kenar uzunluğu a olan kare, R_2 bölgesi $\sqrt{2}a$ yarıçaplı disk olmak üzere,

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \le \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \le \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

yazabiliriz. Kutupsal koordinatları kullanırsak,

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-r^2}\,rdrd\theta \le (I_a)^2 \le \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2}\,rdrd\theta$$

buradan,

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-r^2}\right) \le (I_a)^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2a^2}\right)$$

$\lim_{a\to\infty}$ için istene sonuç elde edilr:

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

39.11 Alıştırmalar

1. $D = \{(x,y) | \quad \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\}$ ise

$$\iint_D \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

2. $z = x^2 + y^2$ parabolünün altında, $xy-$ düzleminin üstünde ve $x^2 + y^2 = 2x$ silindirinin içinde kalan katı cismin hacmini bulunuz.

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi ile üstten ve $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisi ile alttan sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

4. D bölgesi $x = \sqrt{4-y^2}$ yarı çemberi ve $y-$ekseni ile sınırlı bölge ise,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dA$$

integralini hesaplayınız.

5. D bölgesi $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 2x$, çemberleri ile sınırlı bölge ise,

$$\iint_D x\, dA$$

integralini hesaplayınız.

6.
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

7.
$$\int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

8.
$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} (x^2.y^2)\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

9.
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dydx$$

integralini hesaplayınız.

10. Aşağıdaki ntegralleri tek bir integral işareti atında yazınız.

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy\, dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

integralini hesaplayınız.

11. $r = 2 - \sin\theta$ kalp eğrisinin alanını bulunuz.

12. $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2 + y^2$ praboloidleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

13. $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$ ise

$$\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dA$$

integralini hesaplayınız.

14. $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ ise

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$$

integralini hesaplayınız.

15. $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ise

$$\iint_D e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\, dA$$

integralini hesaplayınız.

16. $r = 2\sin\theta$ eğrisini çiziniz.

17. $r = 1 - \cos\theta$ eğrisini çiziniz.

18. $r = \theta$ eğrisini çiziniz.

19. $r = |\theta|$ eğrisini çiziniz.

20. $r = 2\cos 4\theta$ eğrisinin birinci bölgede sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

21.

$$\int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-x^2-y^2}\, dydx$$

integralini hesaplayınız.

22. $z = 4(x^2+y^2$ paraboloidi, $x^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ si,lindiri ve xy düzlemi tarafından sınırlanan hacmi bulunuz.

23. $x^2+y^2+z^2 = 25$ küresi içinde ve $x^2+y^2 = 9$ silindiri dışında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

24. Kutupsal koordinatları kullanarak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\, d\theta = 1$$

olduğunu gösteriniz.

25.

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx$$

integralini hesaplayınız.

olduğunu gösteriniz.

26.

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$

integralini hesaplayınız.

27. $r = 2\sqrt{(2-\sin 2\theta)}$ eğrisinin birinci bölgede sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

28. $r = 1+\cos\theta$ kalp eğrisi içinde ve $r = 1$ çemberi dışında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

29. $r = \frac{4\theta}{3}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ spirali ile x ekseninin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

30. $r = 1+\cos\theta$ ile $r = 1-\cos\theta$ kalp eğrileri arasındaki alanı bulunuz.

31.
$$f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$$
fonksiyonunun $x^2+y^2 \le \frac{3}{4}$ bölgesi üzerindeki integralini bulunuz.

32.
$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$
fonksiyonunun $x^2+y^2 = 1$ çemberi ile $x^2+y^2 = e^2$ çemberinin sınırladığı bölge üzerindeki integralini bulunuz.

33. $r^2 = 9\sin 2\theta$ eğrisinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

34. $y = x^2, \quad y = -1, \quad y = 2x-1$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

35. $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ eğrisine Nernoulli lemniskatı denilir. Bu eğrnin $P(1,1)$ noktasındaki teğpetinin denklemini yazınız.

36. $(y-a)^2(x^2+y^2) = b^2y^2$ eğrisine Nicomede konkoidi denilir. Bu eğrinin $P(\sqrt{15},1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

37. Kapalı türev formülünü kullanarak, çemberin her teğetinin, çember merkezini değme noktasına birleştiren yarıçapa dik olduğunu gösteriniz.

38. Kutupsal koordintları kullanarak,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} = 1$$
olduğunu gösteriniz.

39.
$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$
integralini hesaplayınız.

40. Pozitif Ox-ekseni ve $r = \frac{4\theta}{3}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ spirali tarafından sınırlananan bölgenin alanını bulunuz.

40 Üç Katlı İntegraller

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dV$$

Şekil 40.1: Üç katlı integral

Üç katlı ya da n-katlı integral tanımı iki katlı integralin genellemesidir. Bu bölümde üç katlı integralleri ele alacağız. İki katlı intgralde integral bölgesi olarak düzlemde bir D blgesini alıyorduk. Üç katlı integralde, integral bölgesi düzlemsel olmak yerine üç boyutlu uzayda bir T hacmi olacaktır. $w = f(x,y,z)$ fonksiyonunun tanım bölgesi

$$T = \{(x,y,z) | \quad a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

kümesidir. Bazı yerlerde $\le$ yerine $<$ bağıntısı gelebilir. Tabii bu küme bir dikdörtgenler prizmasıdır. Ama bu özel bir durumdur; T her zaman uzayda bilinen bir geometrik şekle benzemeyebilir. T kümesi üç boyutlu uzayda bir yer (hacim) doldurur. Bu hacme *katı cisim* (solid) denilir.

Üç katlı integrali tanımlamak için, ilk işimiz T tanım kümesinin bir bölüntüsünü oluşturmak olacaktır. Tek katlı integralde bir doğru parçasının, iki katlı integralde bir dikdörtgenin bölüntüsünü oluşturmuştuk. Üç katlı integralde ise bir dikdörtenler prizmasının bölüntüsünü oluşturacağız. Bu iş, önceki yaptıklarımızın benzeri olacaktır:

$[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü n tane alt aralıktan oluşan

$$\mathscr{P} : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

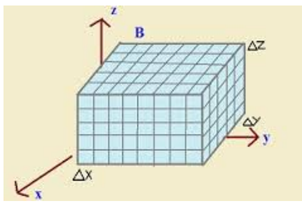
$[c,d]$ aralığının bir bölüntüsü m tane alt aralıktan oluşan

$$\mathscr{Q} : c = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d \quad m \in \mathbb{N}^+$$

$[e,f]$ aralığının bir bölüntüsü s tane alt aralıktan oluşan

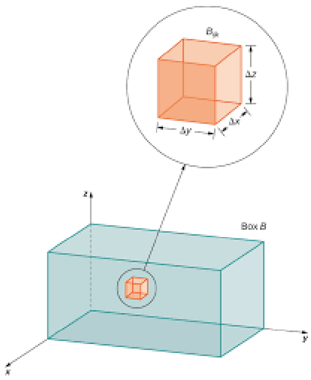
$$\mathscr{R} : e = z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_{s-1} < z_s = f \quad s \in \mathbb{N}^+$$

olsun. T hacminin ayrışımını



Şekil 40.2: Katı cismin bölüntüsü

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \mathscr{P} \times \mathscr{Q} \times \mathscr{R} \\ &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \\ &1 \le i \le I,\ 1 \le j \le J,\ 1 \le k \le K, \quad I,J,K \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$



Şekil 40.3: Bir bölüntünün hacmi

biçiminde ifade edebiliriz. İntegral tanımında bölüntü aralıklarının en uzununun uzunluğu sıfıra giderken limit alındığı için, her üç boyuttaki bölüntü aralıklarını kendi aralarında eşit almak bir kısıtlama getirmez. Simgeleri basitleştirmek için, $\mathscr{P}$ bölüntüsündeki aralıkların uzuluklarının aynı ve Δx, $\mathscr{Q}$ bölüntüsündeki aralıkların uzuluklarının aynı ve Δy, $\mathscr{R}$

bölüntüsündeki aralıkların uzuluklarının aynı ve Δz olduğunu varsayalım. Buna göre T prizmasının T_{ijk} küçük prizmalarından oluştuğunu ve onların her birisinin hacminin

$$\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z \tag{40.1}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Artık integral tanımı için Riemann toplamını oluşturabiliriz:

$$(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in T_{ijk}$$

olmak üzere

$$S_{nms} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V \tag{40.2}$$

diyelim.

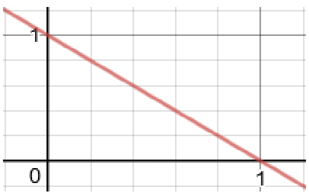
Tanım 40.1. *T bölgesi üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında bir bölge ve $f(x,y,z)$ fonksiyonu bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.*

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \lim_{n,m,s\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V \tag{40.3}$$

diyelim. Sağdaki limit varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun T bölgesi üzerindeki üç katlı integrali denilir ve soldaki simge ile gösterilir.

Anımsanacağı gibi, iki katlı integralin tanımında hesaplamanın zorluğunu aşmak için, katlı integrali integral tanımından hesaplamak yerine ardışık integrallerle hesaplama yoluna gitmiştik. Benzer düşünceyi üç katlı integrallere de uygulayacağız. Üç katlı integrali art arda uygulanan üç tane tek katlı integralin hesplanmasına indirgeyebiliriz. O durumda, tek katlı integral için bildiğimiz bütün integral alma yöntemlerini uygulayabileceğiz. Bu olgu Katlı integrallerin hepsi için geçerlidir ve integral hesabını çok kolaylaştırır.

Yine anımsayacağınız gibi, düzlemsel bir D bölgesi üzerinden iki katlı integrali ardışık integrallere dönüştürüken D bölgesinin $Ox-$ ve $Oy-$ eksenleri üzerine izdüşümlerini alıyor ve izdüşümün uç noktalarını en dıştaki integralin sınırları olarak kullanıyorduk. Benzer işi üç boyut için de düşünebiliriz.Ancak, bu kez izdüşümler koordinat eksenlei yerine xy, xz, yz koordinat düzlemleri üzerine yapılacaktır. Bu üçünü ayrı ayrı bir teorem halinde yazalım:



Şekil 40.4: xy düzlemine izdüşüm

Teorem 40.2.

1. T bölgesinin $xy-$ koordinat düzlemine izdüşümü T_{xy} olmak üzere $f(x,y,z)$ fonksiyonu

$$T = \{(x,y,z) \mid \quad (x,y) \in T_{xy},\ g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_{T_{xy}}\left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dA \tag{40.4}$$

eşitliği sağanır.

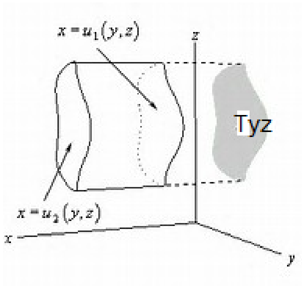
2. T bölgesinin $xz-$ koordinat düzlemine izdüşümü, T_{xz} olmak üzere, $f(x,y,z)$ fonksiyonu

$$T = \{(x,y,z) | \quad (x,z) \in T_{xz},\, h_1(x,z) \le y \le h_2(x,z)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_{T_{xz}} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dA \tag{40.5}$$

eşitliği sağanır.



Şekil 40.6: yz düzlemine izdüşüm

3. T bölgesinin $yz-$ koordinat düzlemine izdüşümü T_{yz}olmak üzere $f(x,y,z)$ fonksiyonu

$$T = \{(x,y,z) | \quad (y,z) \in T_{yz},\, k_1(y,z) \le x \le k_2(y,z)\}$$

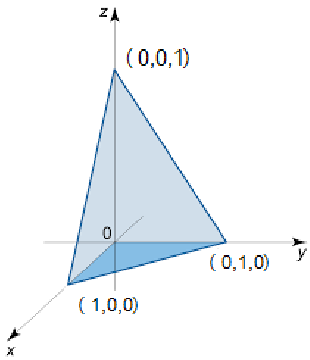
bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_{T_{yz}} \left(\int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dA \tag{40.6}$$

eşitliği sağanır.

40.1 *Hacim*

T tanım bölgesinde $f(x,y,z) \equiv 1$ ise, f nin T bölgesi üzerinden üç katlı interali T katı cisminin hacmine eşitir. Bunu bir teorem olarak ifade edbiliriz:



Şekil 40.7: Düzgün dörtyüzlü

Teorem 40.3.

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_{T_{xy}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \, dz \right) dA \tag{40.7}$$

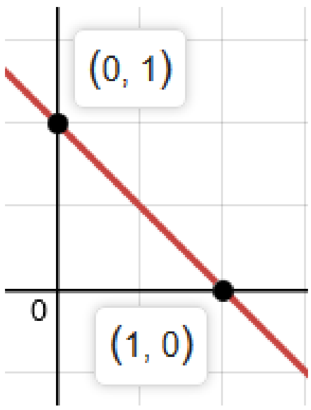
$$= \iint \left(g_2/x,y) - g_1(x,y) \right) dA \tag{40.8}$$

ifadesi iki yüzey arasında kalan katı cismin hacmini verir.

Örnek 40.4. *T katı cismi $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ düzlemlerinin sınırladığı düzgün dörtyüzlüdür.*

$$\iiint_T z dV \tag{40.9}$$

integralini hesaplayınız.



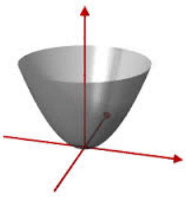
Şekil 40.8: Düzgün dörtyüzlünün xy düzlemi üzerine izdüşümü

Çözüm: T bölgesinin xy düzlemi üzerine izdüşümü T_{xy} olsun. T bölgesi üstten $z = 1 - x - y$ düzlemi ile ve alttan $z = 0$ düzlemi ile sınırlıdır:

$$T = \{(x,y,z) : \quad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, \quad 0 \le z \le 1 - x - y\} \tag{40.10}$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned}\iiint_T z\,dV &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx\\ &= \int_0^1\int_0^{1-x} \frac{z^2}{2}\Big|_0^{1-x-y} dy\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 -\frac{(1-x-y)^3}{3}\Big|_0^{1-x} dx\\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx\\ &= \frac{1}{6}\left(-\frac{(1-x)^4}{4}\Big|_0^1\right.\\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$



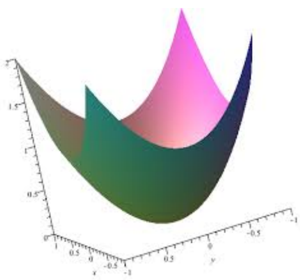
Şekil 40.9: paraboloid

Aynı integrali T nin xz ve yz düzlemleri üzerine izdüşümleri için hesaplayınız.

Örnek 40.5. *T katı cismi $z=8-x^2-y^2, z=x^2+y^2$ paraboloidleri arasında kalan bölgedir.*

$$\iiint_T dV \tag{40.11}$$

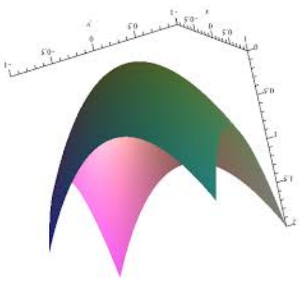
integralini T nin $xy-$ düzlemi üzerine izdüşümünü alarak hesaplayınız ve $xz-$ düzlemi üzerine izdüşümü (2.Tip) ve xz düzlemi üzerine izdüşümü (3.Tip) üzerinde integral sınırlarını yazınız.



Şekil 40.10: paraboloid

Çözüm: xy-düzlemi üzerindeki izdüşümü $T_{xy}: x^2+y^2 \le 4$ diskidir. Çünkü $z=8-x^2-y^2$ denkleminde $z=0$ konulursa T_{xy} izdüşümü $x^2+y^2=4$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}I=\iiint_T dV &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx\\ &= 4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(8-2(x^2+y^2)\right)dy\,dx\\ &= 16\pi\end{aligned}$$



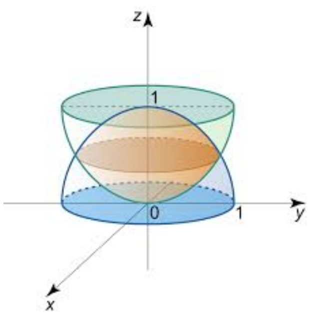
Şekil 40.11: paraboloid

olur. Ayrıca,

$$I=\int_0^4\int_{y^2}^4\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx\,dz\,dy+\int_{-2}^{2}\int_4^{8-y^2}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} dx\,dz\,dy$$

ya da

$$I=\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx\,dz\,dy+\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} dx\,dy\,dz$$



Şekil 40.12: paraboloidler arasındaki hacim

ve

$$I=\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy\,dz\,dx+\int_{-2}^{2}\int_4^{8-x^2}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dy\,dz\,dx$$

ya da

$$I=\int_0^4\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy\,dx\,dz+\int_4^8\int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}}\int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dy\,dx\,dz$$

olur.

40.2 Alıştırmalar

1.
$$D = \{z + x^2 = 4, y + z = 4, y = 0, z = 0$$
yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

2.
$$D = \{y^2 + z^2 = 1, x = 0, x + y + z = 2$$
yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

3.
$$S = \{z = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 = 4$$
yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

4.
$$D = \{x^2 + z^2 = 4, x^2 + z^2 = 4$$
yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

40.3 Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

Tek ve iki katlı inegrallerde yaptığımız gibi, üç katlı integral alırken de hesaplamayı kolaylaştıracak değişken değiştirimi yapabiliriz. Bunu sağlayan teorem şudur:

Teorem 40.6. *1. $\phi = f(x, y, z)$ fonksiyonu üç boyutlu uzaydaki bir S bölgesinde sürekli, bire bir ve örten τ dönüşümü,*

$$\tau : \begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = k(u, v, w) \end{cases}$$

S bölgesini S^* bölgesine dönüştürsün.

2. g, h, k fonksiyonları S^* üzerinde sürekli türevlenebilir olsunlar.

3. τ dönüşümünün jacobian'ı

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

olmak üzere $J(u, v, w) \neq 0$ ise

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iiint_{S^*} f\left(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)\right) |J(u, v, w)| \; du dv dw$$

olur.

Kanıt: İki katlı integrallerde yaptığımıza benzer olarak yapılabilir.

Örnek 40.7. $S = \{(x, y, z) | \quad 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 1\}$ *olmak üzere,*

$$\tau : \begin{cases} u = x \\ v = xy \\ w = 3z \end{cases}$$

dönüşümü altında

$$\iiint_S (x^2 y + 3xyz)\, dxdydz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = x, v = xy, w = 3z \Rightarrow x = u, y = \frac{v}{u}, z = \frac{w}{3}$ yazılabilir. Buradan,

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-v}{u^2} & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\iiint_S (x^2 y + 3xyz)\, dxdydz & \\
&= \iiint_{S^*} \left(u^2(\frac{v}{u}) + 3u(\frac{v}{u})(\frac{w}{3})\right) |J(u,v,w)|\, dudvdw \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^2 \int_1^2 \left(v + \frac{vw}{u}\right) dudvdw \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \int_0^2 (v + vw\ln 2)\Big|_1^2\, dvdw \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 (1 + w\ln 2)\frac{v^2}{2}\Big|_0^2\, dw \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 (1 + w\ln 2)\, dw \\
&= \frac{2}{3}\left((w + \frac{w^2}{2}\ln 2\Big|_0^3\right. \\
&= \frac{2}{3}\left((3 + \frac{9}{2}\ln 2\right) \\
&= 2 + \ln 8
\end{aligned}$$

bulunur.

40.4 Alıştırmalar

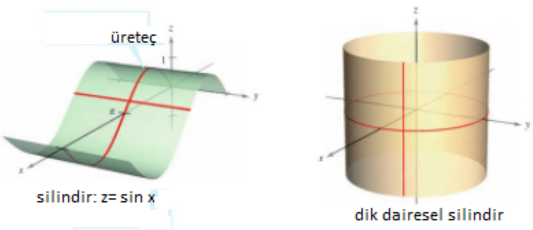
1. $x = uv, y = vw, z = uv$ dönüşümünün Jacobiyanını bulunuz.
2. $x = e^{u-v}, y = e^{u+v}, z = e^{u+v+w}$ dünüşümünün Jacobiyanını bulunuz.
3. $S : \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$ elipsoidinin sınırladığı bölgenin hacmini $x = 2u, y = 3v, z = 5w$ dönüşümünü kullanarak hesaplayınız.

40.5 Silindirsel Koordinatlar

40.5.1 Silindir Nedir?

Tanım 40.8. *Düzlemsel bir C eğrisi ile uzayda bir d doğrusu verilsin. C eğrisini kesen ve d doğrusuna paralel olan bütün doğruların oluşturduğu kümeye silindir denilir. C eğrisine silindirin üreteci (generating curve) ve d eğrisine de silindirin doğrultmanı (directrix) denilir.*

Buna göre silindir uzayda özel bir yüzey türüdür. Eğer üreteç bnir çember ise boru şeklinde bir silindir oluşur. Eğer doğrutman çember düzlemine dik ise , dik dairesel silindir oluşur.



Şekil 40.13: Silindirler

Üç boyutlu koordinat sistemlerinin hepsi üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminin işlevini bazı özel durumlar için daha kolay ifade etmeye yararlar. Dolayısıyla, hepsi kartezyen sistemin (x, y, z) kordinatlarını kendi işlevlerine uygun biçimde ifade ederler.

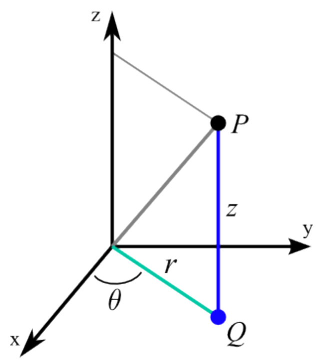
Bunlardan birisi silindirik koordinat sitemidir. Dairesel silindir yüzeyi üzerindeki noktaları kolay belirlemeye yarar. Silindirin yarıçapı değiştirilerek uzaydaki her noktanın konumunu belirlenebilir.

Üç boyutlu uzayda bir (x,y,z) noktasının dikey kartezyen koordinat sisteminden silindirik koordinatlara dönüşümü,

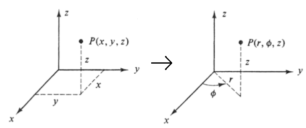
$$\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

denklemleri ile verilir.

Silindirsel koordinatlar kullanılarak üç katlı integraller kolayca hesaplanabilir.



Şekil 40.14: Siindirsel koordinatlar



Şekil 40.15: Kartezyenden silindirsele dönüşüm

Örnek 40.9. $x^2+y^2 = a^2$ *denklemini silindirsel koordinatlra dönüştürünüz.*

Çözüm:

Dikey kartezyen koordinat sisteminde silindirsel koordinat sistemine dönüşüm formülleri kullanılırsa,

$$r^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = a$$

çıkar.

Örnek 40.10. $x^2 + y^2 = a.z$ *paraboloidini silindirsel koordinatlara dönüştürünüz.*

Çözüm:

Dikey kartezyen koordinat sisteminde silindirsel koordinat sistemine dönüşüm formülleri kullanılırsa,

$$r^2 = az$$

çıkar.

Silindirsel koordinatlardaki üç katlı integrali ardışık integrallere dönüştürmek için şu teoremi kullanırız:

Teorem 40.11. *T cismi üstten $z = v(r,\theta)$ ve alttan $z = u(r,\theta)$ yüzeyleri ile sınırlı olsun.*

1. *T nin $xy-$ düzlemi üzerine D izdşümü kutupsal koordinatlarda verilsin.*

2. $f(r,\theta,z)$ fonksiyonu S üzerinde sürekli olsun.

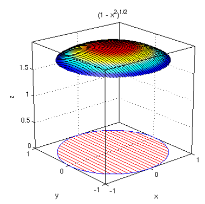
3.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

ise,

$$\iiint_S f(r,\theta,z)dV = \iint_D \int_{u(r,\theta)}^{v(r,\theta)} f(r,\theta,z)r\,dzdrd\theta \qquad (40.12)$$

eşitliği sağlanır.



Şekil 40.16: xy düzlemine izdüşüm

Kanıt: Öncekiler gibi yapılabilir.
Özel olarak,

$$D = \{(r,\theta): \quad \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$$

ise,

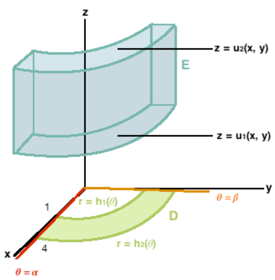
$$\iiint_S f(r,\theta,z)dV = \iint_D \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u(r,\theta)}^{v(r,\theta)} f(r,\theta,z)r\,dzdrd\theta \qquad (40.13)$$

olur.

Örnek 40.12. *S bölgesi birinci sekizde birlik (first octant) bölgede $x^2+y^2 = 1$ ve $x^2+y^2 = 4$ silindirleri ile $z = 0, z = 1, x = 0, x = y$ düzlemleri tarafından sınırlı bölge ise,*

$$\iiint_S (x^2+y^2)dV \qquad (40.14)$$

integralini hesaplayınız.



Şekil 40.17: İzdüşüm

S bölgesi silindirik koordinatlarda

$$\{(r,\theta,z):\ 1 \le r\ \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le 1\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2+y^2)\,dV \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int 1^2 r^2.r\,drd\theta dz \\ &= \frac{15}{16}\pi \end{aligned}$$

olur.

Örnek 40.13.

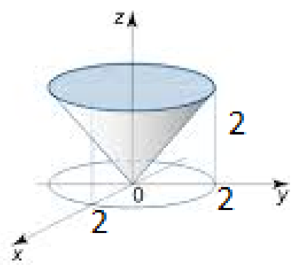
$$\int -2^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)dzdydx$$

integralini silimdirik koordinatları kullanarak hesaplayınız.

Çözüm: İntegral bölgesi

$$S = \{(x,y,z):\ -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}$$

olduğundan



Şekil 40.18: İzdüşüm

$$\iiint_S (x^2+y^2)\,dV$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2\int_r^2 r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 z\Big|_r^2\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3(2-r)\,dr\,d\theta \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{2}r^4-\frac{1}{5}r^5\Big|_0^2\right. \\
&= \frac{16}{5}\pi
\end{aligned}$$

Örnek 40.14. $S=\{(x,y,z):\quad x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\}$ *ise*

$$\iiint_S z e^{-x^2-y^2}\,dV \tag{40.15}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Silindirik koordinatlar kullanılır ve ardışık integraller uygulanırsa,

$$\iiint_S z e^{-x^2-y^2}\,dV$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 z e^{-r^2} r\,dr\,d\theta\,dz \\
&= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)
\end{aligned}$$

çıkar.

Şekil 40.19: Paraboloidler arsında kalan hacim

Örnek 40.15. *S cismi* $8-r^2$ *ve* $z=r^2$ *paraboloidleri ile sınırlı bölge ise S cisminin hacmini bulunuz.*

Çözüm: Hacim formülüuygulanırsa,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2}^{8-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (8-r^2-r^2)\,r\,dr\,d\theta \\
&= 16\pi
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 40.16. *Kartezyen koordinat sistemindeki*

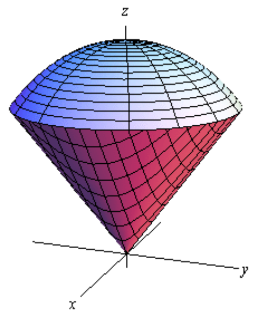
$$I=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$$

ardışık integrali küresel koordinat sistemine dönüştürerek çözünüz.

Çözüm:
Küresel koordin atlara dönüşüğm yapılırsa,

Şekil 40.20: Paraboloidler arsında kalan hacim

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2} \rho.\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$$
$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi$$
$$= \pi$$



Şekil 40.21: Paraboloidler arsında kalan hacim

çıkar. Görüldüğü gibi, küresel koordinatlara dönüşüm işllemleri çok basitleştirmektedir.

Örnek 40.17. *a yarıçaplı kürenin içinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin ayırdığı parçanın hacmini bulunuz.*

Çözüm:
Çözüm: Küresel koordinat sistemi kullanılırsa,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho d\varphi d\theta = 8\pi$$

çıkar.

40.6 *Alıştırmalar*

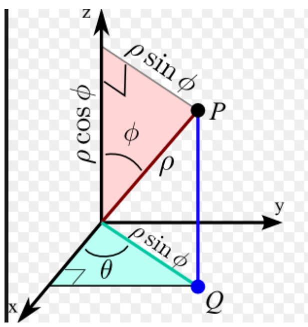
1. Dikey kartezyen koordinatlarda verilen aşağıdaki noktaları silindirik koordinatlara dönüştürünüz:

$a)$	$(1,-1,4)$	(b)	$(2\sqrt{3},2,17)$	(c)	$(\frac{1}{2}\sqrt{3},0,-\frac{1}{2})$
$d)$	$(-4,-4,0)$	(e)	$(3\sqrt{2},-3,3)$	(f)	$(3,-\sqrt{7},\sqrt{7})$

2. Dikey kartezyen koordinatlarda verilen aşağıdaki denklemleri silindirik koordinatlara dönüştürünüz:

$a)$	$x^2+y^2+z^2=4$	(b)	$x+y-z=1$	(c)	$x^2+y^2-z^2=1$
$d)$	$x^2+z^2=16$	(e)	$x^2+y^2+z^2=4z$	(f)	$-x^2-y^2+z^2=1$

40.7 *Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar*



Şekil 40.22: Küresel koordinatlar

Üç boyutlu koordinat sistemlerinin hepsinin üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminin işlevini bazı özel durumlar için daha kolay ifade etmeye yaradığını söylemiştik. Bu kitapta inceleyeceğimiz ikinci koordinat sistemi küresel kordinat sistemidir.

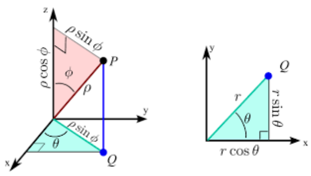
Küresel koordinat sistemi adından da anlaşoldığı gibi, bir küre yüzeyi üzerindeki noktaların konumunu belli etmek için kullanılan koordinat sistemidir. Tabii, kürenin yarıçapını değiştirerek üç boyutlu uzaydaki her noktanın konumunu küresel koordinat sistemi ile belirlemek mümkündür.

Küresel koordinat sisteminde üç nicelik vardır (yandaki şekle bakınız):

1. Uzaydaki P noktasının başlangıç noktasına $|OP|$ uzaklığı. Çoğunlukla, $\rho = |OP|$ ya da $r = |OP|$ ile gösterilir.

2. $|OP|$ nin xy-düzlemi üzerine $|OQ|$ izdüşümü ile Ox-ekseni arasındaki θ açısı. Bu açı silindirik koordinatlardaki işleve sahiptir ve üzerinde bir kısıt yoktur.

3. $|OP|$ ile Oz-ekseninin pozitif kısmı arasınadki φ açısı.



Şekil 40.23: Küresel koordinatlar

Üç boyutlu uzayda bir $P(x, y, z)$ noktasının dikey kartezyen koordinat sisteminden küresel koordinatlardaki (ρ,ϕ,θ) noktasına dönüştüren η dönüşümü,

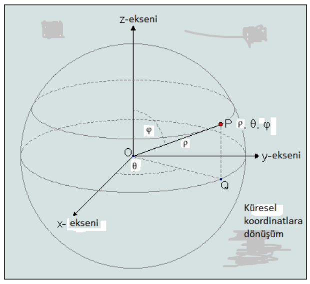
$$\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

denklemleri ile verilir. Burada P noktasının başlangıç noktasına uzaklığı ρ, P noktasının $xy-$ düzlemine izdüşümü olan Q noktasının başlangıç noktasına uzaklığı $r = \rho\sin\phi$, OQ nun $Ox-$ ekseniyle pozitif yöne yaptığı açı $\theta \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$, OP nin $Oz-$ ekseni ile pozizitif yönde yaptığı açı ϕ, $(0 \le \varphi \le \pi)$ dır. θ için kısıt olmadığını söylemiştik. Ama φ için $(0 \le \varphi \le \pi)$ kısıtlamasının olduğunu unutmayınız.

Örnek 40.18. *Dikey kartezyen koordinat sistemindeki denklemi*

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

olan küreyi küresel koordinat sisteminde gösteriniz.

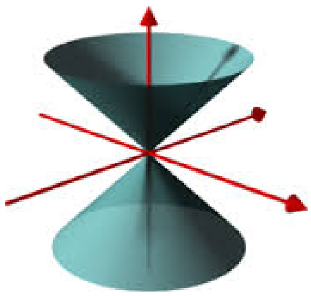


Şekil 40.24: kuresel koordinatlara donusum

Çözüm: Yukrıdaki η dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} 1 &= \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + (\rho\cos\phi - 1)^2 \\ &= \rho^2\sin^2\phi\left(\cos^2\theta + \sin^2\phi\right)\rho^2\cos^2\phi 2\rho\cos\phi + 1 \\ &\Rightarrow = \rho^2\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) \\ &\Rightarrow 2\rho\cos\phi \\ &\Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\phi \\ &\Rightarrow \rho = 2\cos\phi \end{aligned}$$

çıkar.



Şekil 40.25: Dik dairesel konini

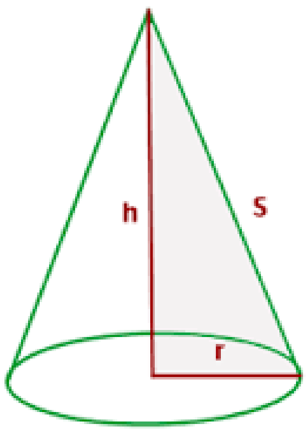
Örnek 40.19. *Dikey kartezyen koordinat sistemindeki denklemi*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olan koniyi küresel koordinat sisteminde gösteriniz.

Çözüm: Yukrıdaki η dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} \rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2\sin^2\phi} \qquad & (\rho \ge 0, \sin\phi \ge 0) \\ \rho\cos\phi &= \rho\sin\phi \\ \cos\phi & \sin\phi \\ \phi = \frac{\pi}{4} \quad & (0 \le \phi \le \pi) \end{aligned}$$



Şekil 40.26: Dik dairesel koninin boyutları

çıkar.

Dikey kartezyen koordinat sistemindeki üç katlı integrali küresel koordinat siteminde üç katlı integrale dönüştürmek için aşağıdaki teoremi kullanırız:

Teorem 40.20. *:*

1. *Küresel koordinatlarda gösteilen S sınırlı cismi üzerinde $\xi = f(\rho,\phi,\theta)$ fonksiyonu sürekli,*
2. *η dönüşümü geçerli,*
3. *η dönüşümünün Jacobiyanı,*

$$\rho^2\sin\phi = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| = \left\|\begin{matrix} x_\rho & x_\phi & x_\theta \\ y_\rho & y_\phi & y_\theta \\ z_\rho & z_\phi & z_\theta \end{matrix}\right\|$$

$$= \left\|\begin{matrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & -\rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{matrix}\right\|$$

ise

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \iiint_{S^*} f(\rho,\phi,\theta)\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta \tag{40.16}$$

eşitliği sağlanır.

Burada S^* , S katı cisminin küresel koordinatlardaki temsilidir. $\rho^2\sin\varphi$ş değeri T dönüşümünün jacobian matrisinin determinantının mutlak dğeridir:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & \rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

Kanıt: Teorem (40.6)'dan çıkar.

Örnek 40.21. *Üstten $\rho \le 1$ küresi ve alttan $\phi = \frac{\pi}{3}$ konisi ile sınırlı S bölgesinin hacmini bulunuz.*

Çözüm:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_S \rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{3}\rho^3\sin\phi d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{6}2\pi \\ &= \frac{\pi}{3} \quad birim^3 \end{aligned}$$

Örnek 40.22. $S = \{(x,y,z): \quad x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ *ise,*

$$\iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dV \tag{40.17}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

S cismi küre olduğundan küresel koordinatları kullanmak kolaylık sağlar. Üç katlı interali ardışık integrallere dönüştürürsek,

$$\iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dV$$
$$= \int_0^{pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{(\rho^2)^3}\rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$$
$$= \int_0^{pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 \sin\phi d\rho d\theta d\phi$$
$$= \left(-\cos\phi\Big|_0^{\pi} .2\pi\left(\frac{1}{3}e^{\rho^3}\right|_0^1$$
$$= \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

Örnek 40.23.

$$\int_0^{2\imath}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 3r\, dz dr d\theta \tag{40.18}$$

integralini

1. *Dikey katezyen koordinat sisteminde $dzdxdy$ sırasına göre ardışık integrale dönüştürünüz.*

2. *Küresel koordinat sisteminde $d\rho d\varphi d\theta$ sırasına göre ardışık integrale dönüştürünüz*

3. *Silindirik koordinat sistemine dönüştürerek hesaplayınız.*

Çözüm:

1.
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}\int_{(x^2+y^2)}^{(4-x^2-y^2)} 3dzdxdy$$

2.
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 3\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta$$

3.
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} 3rdzdrd\theta = 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\left(r(4-r^2)^{1/2}-r^2\right)drd\theta$$
$$= 3\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\sqrt{(4-r^2)^3}-\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(8-4\sqrt{2})d\theta$$
$$= (8-4\sqrt{2})2\pi$$

Örnek 40.24. $\rho = 1-\cos\varphi$ *elma yüzeyinin sınırladığı hacmi bulunuz.*

Çözüm: Küresel koordinat sitemini kullanalım:

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$
$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$$
$$= 8\pi$$

çıkar.

40.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki interallerin integral bölgelerini çiziniz ve interali hesaplayınız.

1. (a)
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{9-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$
(b)
$$\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

2. S bölgesi $z=0$ düzleminin üstünde, $z^2=4x^2+4y^2$ konisinin altında ve yandan $x^2+y^2=1$ sindiri ile sınırlı ise
$$\iiint_S x^2\,dV$$
integralini bulunuz.

3.
$$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$$
integralini silindirsel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

4.
$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy\,dV$$
integralini silindirsel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

5.
$$\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy$$
integralini küresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

6.
$$\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dz\,dx\,dy$$
integralini küresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

7. Birinci bölgede $x^2+y^2+z^2=4$ küresi ile sınırlı S bölgesi üzerinde
$$\iiint_S e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dV$$
integralini hesaplayınız.

8. $z=2$, $z=4$ düzlemleri ile $|x|+|y|=1$ silindirinin sınırladığı hacmi bulunuz.

9.
$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\,dz\,dx\,dy$$
integralini küresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

Index