

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

1	<i>Analiz Öğretimi</i>	3
1.1	İki Milenyum Süren Sorunlar	21
1.2	Mantık ve Matematik	25
1.2.1	Tümdengelim	26
1.2.2	Tümevarım	27
1.3	Matematik Dili	30
I	Ön Bilgiler	31
2	<i>Ön Bilgiler (Pre Kalkülüs)</i>	3
2.1	Ön Kalkulus	33
3	<i>Önermeler Cebiri</i>	3
3.1	İki-değerli Mantık	35
3.2	Matematiksel Mantık	35
3.3	Boole Cebiri	36
3.4	Önermeler	36
3.4.1	Yalın Önermeler	37
3.4.2	Bileşik Önermeler	38
3.4.3	Denk Önermeler	38
3.5	Önermeler Cebiri	39
3.6	Operatörler	39
3.6.1	\wedge Operatörü	39
3.6.2	\vee Operatörü	40
3.7	Değilleme	40
3.7.1	Bir Önermenin Değili	40
3.7.2	İse Bağlacı	41
3.7.3	Koşullu Önerme Sonuçları	42
3.8	\vee Operatörünün Özellikleri	43
3.8.1	\vee 'nin Eşgüçlülüğü	43
3.8.2	\vee 'nin Yer Değişim Özeliği	43
3.8.3	\vee 'nin Birleşimi	43
3.9	Dağılma	44
3.10	Bileşik Önermelerin Değillenmesi	44
3.10.1	De Morgan Kuralları	44
3.11	\Leftrightarrow : Ancak ve Ancak Operatörü	45

3.12 Hepdoğru ve Hepyanlış	46
3.12.1 Karşıt Ters	49
3.12.2 Alıştırmalar	49
3.12.3 Alıştırmalar	54

4 *Kümeler Cebiri* 4

4.1 Kümeler Cebiri	55
4.1.1 Kapsama	55
4.1.2 Evrensel Küme	56
4.2 Venn Çizenekleri	56
4.2.1 Tümleyen Küme	56
4.2.2 Boş Küme	56
4.2.3 Tek öğeli küme	56
4.2.4 Eşit Kümeler	57
4.2.5 Has Alt Küme	57
4.2.6 Kuvvet Kümesi	57
4.2.7 Simetrik Fark	57
4.3 Bağıntılar	57
4.3.1 Kartezyen Çarpım	58
4.3.2 Grafik	58
4.3.3 Kartezyen Çarpımın Özellikleri	59
4.4 Analitik Düzlem	59
4.5 Bağıntılar	59
4.5.1 Bağıntıların Gösterimi	59
4.5.2 Grafik	60
4.6 Bağıntı Türleri	60
4.7 Denklik Bağıntıları	60
4.7.1 Eşitlik	60
4.8 Denklik Bağıntısı Nedir?	61
4.8.1 Denk Öğeler	61
4.9 Denklik Sınıfları	61
4.10 Ters Bağıntı	62
4.11 Simetrik Bağıntı	62

5 *Sayılar* 4

5.1 Sayıların Kuruluşu	65
5.2 Sayıların Sıralanması	66
5.3 Doğal Sayılar	67
5.4 Doğal Sayıların Kuruluşu	67
5.5 Peano Belitleri	67
5.6 Sonlu Tüme Varım İlkesi	67
5.7 Nicelik Sayıları	67
5.8 Eřđüçlülük	68
5.9 Sayılabilirlik	69
5.10 Sayılamayan Sonsuz Kümeler	69
5.11 Gerçel Sayıların Tamlığı	70
5.12 Alıştırmalar	70

6 Rasyonel Üslü İfadeler 4

6.1	Tamsayı Üsler	71
6.1.1	Üslü İfadelerin Özellikleri:	71
6.1.2	Negatif Üsler	72
6.1.3	Benzer Üslü İfadeler	72
6.2	Rasyonel Kuvvetler	72
6.3	Üslü Denklemler	74
6.4	Aliştirmalar	74
6.5	Üslü Denklemler	75
6.6	Aliştirmalar	75
6.7	Köklü İfadeler	75
6.8	Aliştirmalar	78
6.9	e Sayısı	78
6.10	Analitik Geometri	80
6.11	n-sıralılar	80
6.12	Kartezyen Çarpım	81
6.12.1	İkili ve Çoklu sıralılar	81
6.12.2	n-sıralılar	82
6.13	Analitik Geometri	82
6.14	Kartezyen Çarpımın Genelleşmesi	83
6.15	ALİŞTIRMALAR	83

7 Denklemler 5

7.1	Doğru denklemleri	87
7.1.1	İki noktası bilinen doğru Denklemi:	87
7.1.2	Bir noktası ve eğimi bilinen doğru Denklemi:	88
7.2	Doğrunun Genel Denklemi	88
7.2.1	İkinci Dereceden Denklemler	88
7.2.2	$ax^2 = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3	$ax^2 + bx = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3.1	$ax^2 + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	89
7.3.2	$ax^2 + bx + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü	90
7.4	Değişken değiştirme	92
7.5	Köklü denklemler	92
7.6	Mutlak Değer	93
7.7	Aliştirmalar	94
7.8	Köklerle Katsayılar Arasındaki Bağlılıklar	94
7.8.1	Köklerin Toplamı:	95
7.8.2	Köklerin Çarpımı:	95
7.8.3	Köklerin Farkının Mutlak Değeri:	95
7.9	Aliştirmalar	95
7.10	İkinci Dereceden Denklemlerin İncelenmesi	96
7.11	Denklemler Sistemleri	97
7.12	Eşitsizlikler	97
7.13	Eşitsizlik Sistemleri	100
7.14	Aliştirmalar	100
7.15	İkinci Dereceden Fonksiyonlar	101
7.16	Parabol Çizimi	103

7.17 Alıştırmalar	105
7.18 Eşitsizlik Sistemlerinin Grafikle Çözümü	105
7.19 Örnekler:	105
7.20 Doğrusal denklem sistemleri	107

8 Parametrik denklemler 6

8.1 Eğrinin yönü	109
8.2 kapalı Eğri	109
8.3 Çember'in Parametrik Denklemleri	109
8.4 Elips'in Parametrik Denklemleri	110
8.5 Cycloid	111

9 Matrisler 6

9.1 Matrisler	113
9.1.1 Satır ve Kolon	113
9.2 Matrisin Bileşenleri	114
9.3 Matris İşlemleri	114
9.3.1 Matrislerin Toplamı	114
9.3.2 Matrislerde Çıkarma	115
9.3.3 Matrisin Sayı ile Çarpımı	115
9.3.4 Matrislerin Çarpımı	116
9.3.5 Çarpımın Sırası Değişemez	117
9.3.6 İki den çok matrisin Çarpımı	117
9.3.7 Matrisin Devriği (transpose)	117
9.4 Matrislerin Çarpımının Devriği	118
9.4.1 Matrislerde Bölme	118
9.5 Matris Türleri	119
9.5.1 Kare Matris	119
9.5.2 Sıfır Matris	119
9.5.3 Kare Matrisin Köşegenleri	119
9.5.4 Kare Matrisin Kuvveti	119
9.5.5 Birim Matris	119
9.5.6 Simetrik Matris	120
9.5.7 Anti Simetrik Matris	120
9.5.8 Ters Matris	121
9.5.9 Üçgensel Matris	121
9.5.10 Matrisin İzi (trace)	121
9.6 Örnekler	122
9.7 Matrisin Uzunluğu (size)	122
9.8 Determinantlar	123
9.9 Determinant Nedir?	123
9.9.1 1×1 Matrislerin determinanı	123
9.9.2 2×2 Matrislerinin determinanı	123
9.9.3 3×3 Matrislerinin determinanı	124
9.9.4 Sarrus Yöntemi	124
9.10 Başka Yöntemler	125
9.10.1 Yüksek Boyutlu Matrislerin Determinantları	125
9.11 Laplace Yöntemi	125

9.11.1 Minör	125
9.12 Eşçarpan (cofactor)	126
9.13 Determinant için Laplace Açılımı	127
9.14 Determinantların Özellikleri	128
9.14.1 Sarrus Yöntemiyle Hesap:	130
9.14.2 Laplace Yöntemiyle Hesap:	130
9.14.3 Gauss Eleme Yöntemi	130
9.15 Ters Matris	131
9.16 Matrisler Üzerinde İlkel Satır İşlemleri	131
9.17 Gauss Eleme Yöntemi ile Ters Matrisi Bulma	132
9.18 Eklı Matris	133
9.19 Eşçarpan İle Matrisin tersini Bulma	134
9.20 Doğrual Denklem Sistemleri	137
9.21 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	138
9.22 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	140
9.23 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	141

10 Doğrual Denklem Sistemleri 7

10.0.1 Sonsuz Çözüm	144
10.0.2 Tek çözüm	144
10.0.3 Matrislerle Çözüm	145
10.1 Denk Sistemler	146
10.2 İndirgenmiş Satır Eşolon Biçimi	147
10.3 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	148
10.4 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	150
10.5 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	151
10.5.1 İki Bilinmeyen için Cramer Formülü	151
10.5.2 Üç Bilinmeyen için Cramer Formülü	153
10.6 Alıştırılmalar	154

11 Polinomlar 7

11.1 Bir Belirsizli Polinomlar	155
11.2 Çok Belirsizli Polinomlar	157
11.3 Terimleri Kuvvetlerine Göre Sıralama	158
11.4 İki Polinomun Eşitliği	158
11.5 Uygulamalar	159
11.6 Polinomlar Kümesi Üzerinde İşlemler	160
11.7 Toplama	160
11.8 Uygulamalar	162
11.9 Çıkarma	163
11.10 Uygulamalar	164
11.11 Çarpma	164
11.12 Sayıl (skalerle) Çarpma	167
11.13 Uygulamalar	168
11.14 Başlıca Özdeşlikler	168
11.14.1 İki Terim Toplamının Karesi	168
11.14.2 İki Terimin Farkının Karesi	169
11.14.3 İki Terimin Toplamı İle Farkının Çarpımı	169

11.14.4Üç Terim Toplamının Karesi	170
11.14.5İki Terim Toplamının Küpü	171
11.14.6İki Terim Farkının Küpü	172
11.14.7İki Küp Toplamı	172
11.15İki Teriminin Kuvvetleri	174
11.16Alıştırmalar	177
11.17Polinomlarda Bölme	178
11.18Uygulamalar	183
11.19Bölme Algoritması	184
11.20Çarpan Teoremi	185
11.21Uygulamalar	187
11.22Uygulamalar	188
11.23Horner Yöntemi ile Bölme	189
11.24Bir Polinomun $(x - a)(x - b)$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalan	190
11.25Uygulamalar	193
11.26Alıştırmalar	195
11.27Polinomların Çarpanlara Ayrılması	197
11.28Karmaşıkları Basite İndirmek!	197
11.29ebob, ekok	198
11.30Cebirsel İfadeleri Çarpanlara	200
11.30.1Ortak Çarpan Parantezine Alma	201
11.31Uygulamalar	201
11.32Uygulamalar	203
11.33Özdeşlikler	203
11.34Uygulamalar	204
11.35Uygulamalar	206
11.36Özdeşlikleri Kullanma	206
11.37Uygulamalar	207
11.38Uygulamalar	209
11.39Uygulamalar	211
11.40Alıştırmalar	214
11.41Başlıca Özdeşlikler	215

12 Fonksiyonlar 8

12.1 Foksiyonun Grafiği	218
12.2 Tek Değerli Fonksiyonlar	219
12.3 Alıştırmalar	219
12.4 Fonksiyon Türleri	221
12.4.1 Eşit Foksiyonalar	221
12.4.2 İçine Fonksiyon	221
12.4.3 Örtün Fonksiyon	221
12.4.4 Bire Bir Fonksiyon	222
12.4.5 Bire Bir İçine Fonksiyon	222
12.4.6 Bire Bir Örtün Fonksiyon	222
12.4.7 Sabit Fonksiyon	222
12.4.8 Sıfır Fonksiyon	222
12.4.9 Özdeşlik Fonksiyonu	222

12.5 Kapalı Fonksiyon	223
12.6 Örnekler	223
12.7 Alıştırmalar	224
12.8 Fonksiyonların Bileşkesi	225
12.9 Bileşke İşleminin Özellikleri	227
12.9.1 Yer Değişim Özeliği Yoktur	227
12.9.2 Birleşme Özeliği	228
12.10 Ters Fonksiyon	228
12.11 Ters Fonksiyonun Grafiği	229

13 Rasyonel İfadeler 9

13.1 Alıştırmalar	231
13.2 Rasyonel İfadelerin Toplamı	231
13.3 Rasyonel İfadelerin Çarpımı	232
13.4 Rasyonel İfadelerde Bölme	233
13.5 Polinom Denklemler	233
13.6 Birinci Dereceden Polinom Denklemlerin Çözümü	233

14 Kombinasyon Ve Permütasyon 9

14.0.1 Kombinasyon (Combination)	235
14.1 Permütasyon (permutation)	235
14.2 Combinatorics	236
14.2.1 Kombinatorik'in temel formülü	237
14.3 Sayma	237

15 Pascal Üçgeni 9

16 Ön Trigonometri 9

16.1 Yönlü Açılar	245
16.2 Yönlü yaylar	245
16.3 Birim Çember	246
16.4 Açı Ölçü Birimleri	246
16.4.1 Derece	246
16.4.2 Grad	247
16.4.3 Radyan	247
16.5 Trigonometrik Fonksiyonlar	247
16.5.1 Simetrik Açılar	250
16.5.2 Simetrikler	250
16.6 Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri	251
16.7 Özel Açılar	251
16.8 Trigonometrik Fonksiyonları Grafikleri	252
16.8.1 Cosinus Grafiği	252
16.8.2 Sinus grafiği	253
16.8.3 Tanjant Grafiği	254
16.9 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	255
16.9.1 Arcsinus Fonksiyonu	255
16.9.2 ArcCosinus Fonksiyonu	256

16.9.3 Arctanjant Fonksiyonu	256
16.9.4 Arccotanjant Fonksiyonu	257
16.10 Örnekler	257
16.11 Periyodik Fonksiyonlar	258
16.12 Alıştırmalar	259
16.13 Limit	260
16.14 Fonksiyonun Limiti	260
16.15 Soldan ve Sağdan Yaklaşım	260
16.15.1 Soldan Limit	260
16.15.2 Sağdan Limit	260
16.15.3 Limit	261
16.16 Uç Noktalarda Limit	261
16.17 Karl Weierstrass'ın Tanımı	262
16.18 Örnekler:	262
16.19 Limit Kuralları	263
16.20 Belirsiz Biçemler	265
16.20.1 Sonsuzdaki Limit	266
16.21 Çözümlü Örnekler	266
16.22 Rasyonel Fonksiyonlarda Limit	270
16.22.1 Sonsuzda Limitin Olmadığı Durum	271
16.22.2 Köklü İfadelerin Sonsuzdaki Limiti	271
16.23 Çözümlü Prolemler	274

26 *Integral Alma Yöntemleri* 10

27 *Belirsiz İntegral* 10

27.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri	305
27.1 Değişken Değiştirme	305
27.2 Trigonometrik İntegraller	307
27.3 Ters Trigonometrik Konumlar	309
27.4 Çözümlü Problemler	310
27.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	316
27.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	316
27.5.2 Basit Kesirlere ayırma	317
27.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa	320
27.6 Karma problemler	323
27.7 Alıştırmalar	331
27.8 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	331
27.9 Sürekli Fonksiyonların İntegrali	332
27.10 Değişken Değiştirme	333
27.11 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	336
27.12 Kısmi İntegrasyon	339
27.13 Polinomların Çarpanlara Ayrılması	342
27.14 Basit Kesirlere Ayırma	345
27.15 Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi	345
27.16 Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması	349
27.17 Rasyonelleştirme	351
27.18 Köklü İfadelerin İntegrali	352

27.19 İndirgenme Yöntemleri	358
27.20 Bazı İndirgeme Formülleri	360
27.21 Bağlantılı Oranlar	361

28 Belirsiz İntegral 11

28.0.1 Belirsiz İntegral Formülleri	363
28.1 Değişken Değişirme	363
28.2 Trigonometrik İntegraller	365
28.3 Ters Trigonometrik Konumlar	367
28.4 Çözümlü Problemler	368
28.5 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	374
28.5.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	374
28.5.2 Basit Kesirlere ayırma	375
28.5.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa	378
28.6 Belirli İntegral	386
28.7 Belirsiz İntegral Kuralları	387
28.8 Calculus'un Birinci Temel Teoremleri	388
28.8.1 Calculus'un 1. Teoremi	388
28.8.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi	388
28.9 Belirsiz İntegral	391
28.9.1 Belirsiz İntegral Formülleri	391
28.10 Alan Hesabı	391
28.11 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	391

29 İntegral 11

29.1 İntegral Kavramı ve Tanımı	395
29.1.1 Belirli İntegral	395
29.2 Belirli İntegral Kuralları	397
29.3 Calculus'un Temel Teoremleri	401
29.3.1 Calculus'un 1. Temel Teoremi	401
29.3.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi	402
29.4 Belirsiz İntegral	404
29.4.1 Belirsiz İntegral Formülleri	404
29.5 Değişken Değişirme	404
29.6 Trigonometrik İntegraller	406
29.7 Ters Trigonometrik Konumlar	408
29.8 Çözümlü Problemler	409
29.9 Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	415
29.9.1 Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	415
29.9.2 Basit Kesirlere ayırma	416
29.9.3 Payda'da Gerçel Kökü Olmayan Çarpan Varsa	419
29.10 Alıştırmalar	422
29.11 Belirli İntegral Kuralları	427
29.12 Sayısal İntegraller	431
29.13 Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu	431

30 *Integral Alma teknikleri* 11

30.1 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	435
30.2 İntegral Alma Yöntemleri	436
30.3 Değişken Değiştirme	437
30.4 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	440
30.5 Kısmi İntegrasyon	443
30.6 Logaritmik integraller	447
30.7 Köklü İfadelerin İntegrali	448

31 *Integral Alma teknikleri* 12

31.1 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	455
31.2 İntegral Alma Yöntemleri	456
31.3 $\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller	457
31.4 İndirgenme Yöntemleri	464
31.5 Bazı İndirgeme Formülleri	466
31.6 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	467
31.7 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	468
31.7.1 Arcsinus Fonksiyonu	468
31.7.2 ArcCosinus Fonksiyonu	469
31.7.3 Arctanjant Fonksiyonu	469
31.7.4 Arccotanjant Fonksiyonu	470
31.8 Örnekler	472
31.9 $\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller	472
31.10 Logaritmik integraller	478
31.11 Dönel Cisimleri Hacimleri	479
31.12 Silindirik Kabuklar Yöntemi	480
31.13 Dilimleme Yöntemiyle Hacim Bulma	482
31.14 Örnek Hacim Hesapları	483

32 *Doğal Logaritma Fonksiyonu* 12

32.1 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Tanımı	488
32.2 Tanım bölgesini Genişletme	488
32.3 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri	489
32.4 Doğal Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	490
32.5 Logaritmik Türev	490
32.6 Logaritmik Türevin İntegrali	490
32.7 Üstel Fonksiyon	491
32.8 a tabanlı Üstel Fonksiyon	491
32.9 a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Davranışı	492
32.10a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Türevi	493
32.11a Tabanlı Üstel Fonksiyonun İntegrali	493
32.12a Tabanına Göre Logaritma	493
32.13 $\log_a x$ fonksiyonunun özellikleri	493
32.14 $\log_a x$ fonksiyonunun Türevi	493
32.15 Çözümlü Problemler	494

33 Kutupsal Koordinatlar 12

33.1 Kutupsal Koordinatlarda Grafik	501
33.2 Alıştırılmalar	502
33.3 Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi Örnekleri	503
33.3.1 Merkeze Göre Simetri	503
33.3.2 Ox - Eksenine Göre Simetri	503
33.3.3 Oy - Eksenine Göre Simetri	503
33.4 Grafik Çiziminde İzlenecek Yol:	505
33.5 Alıştırılmalar	506
33.6 Kutupsal Sistemde Teğetin Eğimi	506
33.7 Kutupsal Kordinatlarda Alan hesabı	507
33.8 İki kutupsal eğri arasında kalan alan	508
33.9 Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu	510
33.10 Kutupsal Koordinatlarda Dönel Yüzeyler	510
33.11 Alıştırılmalar	511
33.12 Parametrik Fonksiyonların Türevi	512
33.13 İkinci Basamaktan Türev	513
33.14 Alıştırılmalar	515
33.15 Sayısal İntegraller	517
33.15.1 Dikdörtten Yöntemi	517
33.16 Yamuk Kuralı	518
33.17 Pappus teoremleri	519
33.18 Alıştırılmalar	520
33.18.1 Dairesel Simit'in Yüzeyi	521
33.18.2 Dairesel Simit'in Hacmi	521
33.19 Simpson Yöntemi	521
33.20 Alıştırılmalar	524

34 Diziler 13

34.0.1 Örnekler	526
34.0.2 Yakınsak Dizi	526
34.1 Aritmetik Dizi	527
34.2 Geometrik Dizi	528
34.3 Monoton Dizi	528
34.4 Alt dizi	528
34.5 Sınırlı dizi	529
34.6 Dizilerde Limit Özellikleri	529
34.7 Alıştırılmalar	534

35 Seriler 13

35.0.1 Kısmi Toplam	536
35.1 Yakınsak Seriler	536
35.2 Rasyonel Terimli Seriler	536
35.3 Özel Seriler	537
35.4 Aritmetik Seri	537
35.5 Geometrik Seri	538
35.6 Binom Serisi	539

35.7 Genelleşmiş Binom Teoremi	540
35.8 Serilerin Özellikleri	541
35.9 Alıştırmalar	544
35.10 Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	544
35.11 Yakınsaklık Aralığı	545
35.12 Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler	546
35.13 Toplama ve Çıkarma	546
35.14 Kuvvet Serilerin Çarpımı	547
35.15 Kuvvet Serilerinin Bölümü	547
35.15.1 Alterne Seriler	547
35.16 Alıştırmalar	550
35.17 Cauchy Dizi ve Serileri	551

36 *Seriler İçin Yakınsaklık Testleri* 14

36.1 p-serisi	558
36.2 Oran Testi	558
36.3 Kök Testi	561
36.4 İntegral Testi: p-serisi	561
36.5 p-serisi	563
36.6 Karşılaştırma Testleri	564
36.7 Limit Karşılaştırma Testi	566
36.8 Oran Testi	569
36.9 Newton Metodu	573

37 *Değişken Terimli Seriler* 14

37.1 Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	577
37.2 Yakınsaklık Aralığı	578
37.3 Kuvvet Serileri Üzerinde Cebirsel İşlemler	579
37.4 Toplama ve Çıkarma	579
37.5 Kuvvet Serilerin Çarpımı	579
37.6 Kuvvet Serilerinin Bölümü	580
37.7 Maclaurin Serisi Uygulamaları	580
37.8 Düzgün Yakınsama	583
37.8.1 Fonksiyon Dizileri	583
37.8.2 Fonksiyon Serileri	587
37.8.3 Fonksiyon Dizileri İçin Cauchy Kriteri	589
37.8.4 Fonksiyon Serileri İçin Cauchy Kriteri	590
37.9 Alıştırmalar	592
37.10 Fonksiyon Dizi ve Serilerinin İntegrali	592
37.11 Dirichlet ve Abel Testleri	596
37.12 Dirichlet Testi	597
37.13 Fonksiyon Dizi ve Serilerinin Türevlenmesi	599
37.14 Alıştırmalar	600
37.15 Kuvvet Serilerinin Türevlenmesi	602
37.16 Alıştırmalar	604
37.17 Kuvvet Serilerinin İntegrali	605
37.18 Çözümlü Kuvvet Serisi Problemleri	606
37.19 Alıştırmalar	609

37.20 Serilerin Yaklaşık Toplamı	610
37.21 Alıştırmalar	612

38 Vektörler 15

38.1 Vektör Uzayı	613
38.2 Simgeler	614
38.3 Denk Vektörler	614
38.4 Vektörlerin Gösterimi	614
38.5 Vektör Uzayında İşlemler	615
38.5.1 Sıfır Vektörü	615
38.6 Vektörlerin Toplamı	615
38.6.1 Toplamanın Özellikleri	616
38.7 Vektörlerde Çıkarma İşlemi	616
38.8 Vektörün Sayı ile Çarpımı	616
38.9 Birim Vektör	617
38.10 Doğrultu Açıları	617
38.11 Analitik Geometriye Giriş	618
38.12 Alıştırmalar	619
38.13 Bileşenlerle İşlemler	620
38.14 Nokta Çarpım	621
38.15 İzdüşüm	622
38.15.1 İzdüşümün Genellenmesi	622
38.16 İki Vektör Arasındaki Açık	623
38.17 İki Vektör Arasındaki Açının Ölçümü	624
38.18 İki Vektörün Birbirine Dikliği	624
38.18.1 Üçgen Eşitsizliği	625
38.19 Uzayda Doğru ve Düzlem	626
38.20 İki noktası Verilen Doğru Denklemi	626
38.21 Noktanın Doğruya Uzaklığı	627
38.22 Düzlem Denklemi	628
38.23 Üç Noktadan geçen Düzlem Denklemi	628
38.24 Noktanın Düzleme Uzaklığı	629
38.25 Alıştırmalar	630
38.26 Vektörel Çarpım	631
38.27 Vektörel Çarpımın Özellikleri	632
38.28 Vektörel Çarpımı Geometrik Yorumları	632
38.28.1 Diklik	632
38.28.2 Alan	633
38.29 Üçlü Çarpım	633
38.30 Alıştırmalar	634
38.31 Uzayda Doğru ve Düzlem	634
38.32 İki noktası Verilen Doğru Denklemi	635
38.33 Noktanın Doğruya Uzaklığı	636
38.34 Düzlem Denklemi	636
38.35 Üç Noktadan Geçen Düzlem Denklemi	637
38.36 Noktanın Düzleme Uzaklığı	638
38.37 Alıştırmalar	639

39 Katlı İntegral 15

39.1 İki Katlı İntegralin Özellikleri	642
39.2 Ardışık İntegral	643
39.3 Katlı İntegral Uygulamaları	654
39.4 Alıştırmalar	659
39.5 Katlı integralde değişken değiştirme	659
39.6 Alıştırmalar	662
39.7 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	663
39.8 Alıştırmalar	665
39.9 İki Katlı İntegral İle Hacim hesapları	666
39.10 Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller	667
39.11 Alıştırmalar	670

40 Üç Katlı İntegraller 16

40.1 Hacim	675
40.2 Alıştırmalar	677
40.3 Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	677
40.4 Alıştırmalar	678
40.5 Silindirselsel Koordinatlar	678
40.5.1 Silindir Nedir?	678
40.6 Alıştırmalar	682
40.7 Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	682
40.8 Alıştırmalar	686

34 Eğrisel İntegraller 16

34.1 Düzlemde Eğrisel İntegral	735
34.2 Uzayda Eğrisel İntegral	740
34.3 Alıştırmalar	742
34.4 Vektör Alanlarının Eğrisel İntegralleri	743
34.5 Divergence	744
34.6 Vector Alanının Eğrisel İntegrali	746
34.7 Eğrisel İntegraller İş	748
34.8 Alıştırmalar	749
34.9 İntegralin Yoldan Bağımsızlığı	750
34.10 Alıştırmalar	755
34.11 Üç Boyutlu Uzayda Korunumlu Vektör Alanı	755
34.12 Green Teoremi	756
34.13 Green teoremi İle Alan Hesabı	759
34.14 Alıştırmalar	760
34.15 Yüzey İntegralleri	760
34.16 Parametrik Yüzeyin Alanı	762
34.17 Yüzey İntegrali	765
34.18 Önlendirilmiş Yüzey Üzerinde İntegral	767
34.19 Vektör Alanlarının İntegrali	768
34.20 Stokes Teoremi	769
34.21 Divergence Teoremi	773
34.21.1 Alıştırmalar	776

35 Vektör Değerli Fonksiyonlar 16

35.1 Vektör Değerli Fonksiyonlar ve Uzay Eğrileri	777
35.2 Vektör Değerli Fonksiyonların Limiti	778
35.2.1 Limit	778
35.3 Vektör değerli Fonksiyonların Sürekliliği	780
35.4 Süreklilik	780
35.5 Türev	780
35.6 Türev Kuralları	781
35.7 Vektör değerli Fonksiyonların Teğeti	782
35.8 Düzgün Eğri	782
35.8.1 Düzgün Eğriler	783
35.9 Vektör Değerli Fonksiyonların integrali	783
35.9.1 Belirsiz İntegral	783
35.9.2 Belirli İntegral	784
35.10 Alıştırmalar	785
35.11 Eğri Uzunluğu	786
35.12 Eğrilik	787
35.13 Eğrilik Çemberi	789
35.14 Normal ve İkinci Normal Vektörler	790
35.15 Alıştırmalar	791
35.16 Uzayda Hareket	792
35.17 Kepler Yasaları	794
35.18 Alıştırmalar	794

36 Konikler 17

36.1 Koniklerin Adlandırılması	795
36.2 Koniklerin Kutupsal Sistemdeki Denklemleri	795
36.3 Koniklerin Kartezyen Denklemi	797
36.4 Alıştırmalar	799
36.5 İkinci Dereceden Yüzeyler	799
36.6 Elipsoid	801
36.7 Elipsoid	801
36.8 Hiperboloid	801
36.9 Eliptik Paraboloid	804
36.10 Eliptik Koni	804
36.11 Alıştırmalar	805

37 Fiziksel uygulamalar 17

37.1 Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	807
37.2 Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	807
37.3 Alıştırmalar	811
37.4 Yay'ın Kütle merkezi	811
37.5 Alıştırmalar	811
37.6 Yoğunluk	811
37.7 Moment	812
37.7.1 Noktaya Göre Moment	812
37.7.2 Doğru üzerinde Moment	812

37.8 Kütle Merkezi	813
37.9 Noktanın Eksene Göre Momenti	813
37.10Düzleme Göre Moment	814
37.11Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	815
37.12Bir Yayın Momenti	815
37.13Uygulamalar	816
37.14Üç Katlı İntegral İle Moment	817
37.15Düzlemsel Bölgelerin Kütle Merkezi	818
37.16Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	819
37.17Alıştırmalar	822
37.18Yay'ın Kütle merkezi	822
37.19Alıştırmalar	823
37.20Yoğunluk	823
37.21Work (İş)	824

38 *Diferensiyel denklemler* 18

38.1 Birinci basamaktan birinci dereceden Diferensiyel denklemler	827
38.2 Özel ve Genel Çözüm	828
38.3 Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	828
38.4 Denklemin Doğrusala Dönüşmesi	830

39 *Diferensiyel Denklemler* 18

39.1 Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	831
39.2 Tam Diferensiyel	833
39.3 Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	840
39.4 Alıştırmalar	843
39.5 İntegral Çarpanı	844
39.6 Alıştırmalar	852
39.7 Birinci Basamaktan Homojen denklemler	854
39.8 Alıştırmalar	862
39.9 Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	864
39.10Alıştırmalar	868
39.11Tam Diferensiyel	869
39.12Alıştırmalar	874
39.13Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	876
39.14Alıştırmalar	879
39.15İntegral Çarpanı	881
39.16Alıştırmalar	888
39.17Birinci Basamaktan Homojen denklemler	889
39.18Alıştırmalar	894
39.19Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	895
39.20Alıştırmalar	900
39.21Bernoulli Diferensiyel Denklemi	901
39.22Bernoulli Diferensiyel Denkleminin Çözümü	901
39.23Çözümlü Örnekler	902
39.24Alıştırmalar	905
39.25Riccati Diferensiyel Denklemi	906
39.26Clairaut Diferensiyel denklemleri	910

39.27Lagrange Diferensiyel Denklemi	911
39.28Alıştırmalar	913

40 Üç Katlı İntegraller 19

40.1 Hacim	917
40.2 Alıştırmalar	919
40.3 Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	919
40.4 Alıştırmalar	920
40.5 Silindirselsel Koordinatlar	921
40.6 Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	923
40.7 Alıştırmalar	926
40.8 Düzensiz İntegraller	927
40.9 Aralığın Sonsuz Olması Durumu	927
40.9.1 $[a, \infty)$ aralığında integral	927
40.9.2 $(-\infty, a]$ aralığında integral	927
40.9.3 $(-\infty, \infty)$ aralığında integral	928
40.10Aralığın uç noktalarında fonksiyonun sınırsız olması durumu: 928	
40.10.1Sol Uç	928
40.10.2Sağ Uç	928
40.11Aralığın içinde fonksiyonun sınırsız olması durumu:	928
40.12Düzensiz intgralleri karşılaştırma:	929
40.12.1Alıştırmalar	937
40.13Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	937
40.14Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	938
40.15Alıştırmalar	941
40.16Yay'ın Kütle merkezi	941
40.17Alıştırmalar	942
40.18Yoğunluk	942
40.19Sıvı Basıncı	942
40.20Work (İş)	944
40.21Pappus teoremleri	945
40.22Alıştırmalar	946
40.23Simpson Yöntemi	947
40.24Yamuk Kuralı	949
40.25Moment	951
40.26Noktaya Göre Moment	951
40.27Doğru üzerinde Moment	951
40.27.1Kütle Merkezi	952
40.28Noktanın Eksene Göre Momenti	952
40.29Düzleme Göre Moment	952
40.30Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	953
40.31Bir Yayın Momenti	954
40.32Uygulamalar	955

41 Belirli İntegral Uygulamaları 19

41.1 Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu	957
41.2 Alan hesapları	960
41.3 Foksiyonun Orta Değeri	961

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,
ORHAN ÖZER, SERKAN ALİ DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

39 Katlı İntegral

Bu bölümde iki ve üç katlı integral uygulamalarına yer verilecektir.

İKİ KATLI İNTEGRAL

$f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun tek katlı integralini,

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad t \in [x_{i-1}, x_i]$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t) \Delta x_i \quad (39.1)$$

Riemann toplamının limiti olarak tanımlamıştık. $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) dx$ integrali $[a, b]$ aralığı üzerinde ve f fonksiyonunun grafiği altında kalan düzlemsel bölgenin alanına eşit olduğunu biliyoruz.

Şimdi, tek değişkenli fonksiyonlar için bildiğimiz bu integral kavramını

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x, y) \quad (39.2)$$

iki değişkenli fonksiyonuna genelleştireceğiz. Tek katlı integraldeki küçük Δz uzunluğu yerine küçük $\Delta x \Delta y$ dikdörtgen alanı gelecektir. S yüzeyi

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\} \quad (39.3)$$

olsun.

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x, y) \quad (39.4)$$

fonksiyonu D bölgesinde tanımlı ve her $(x, y) \in D$ için $|f(x, y)| \leq M$ olacak biçimde bir M sayısı var olsun. Eğer

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad (39.5)$$

ise, koordinat eksenlerine paraleller çizerek, D bölgesini Şekil (39.10) deki gibi sonlu sayıda küçük dikdörtgenlere ayıralım. Oluşan küçük dikdörtgenler ailesine D bölgesinin bir bölüntüsü (partition) denilir. Bu bölüntüyü \mathcal{P} ile gösterirsek;

$$\begin{aligned} D_{ij} &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \\ &= \{(x, y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\} \\ &(i = 1, 2, 3, \dots, m; \quad j = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned}$$

olur. Bölüntü aralıklarını eşit alarak,

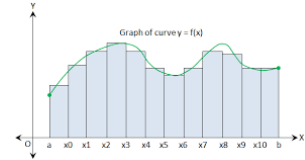
$$\Delta x = \frac{b-a}{m}, \quad \Delta y = \frac{d-c}{n} \quad (39.6)$$

diyelim. D_{ij} dikdörtgenlerinin herbirisin alanı

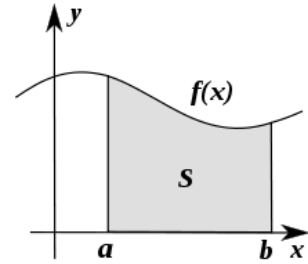
$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \quad (39.7)$$

$$\text{Hacim} = \iint_R f(x, y) dA$$

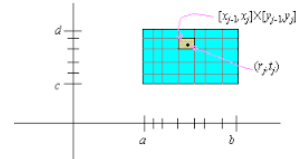
Şekil 39.1: Hacim



Şekil 39.2: Alan



Şekil 39.3: Riemann toplamı



Şekil 39.4: Bölüntü

dir. Bu dikdörtgen alanının köşegen uzunluğuna d_{ij} diyelim. Pisagor teoreminden, $d_{ij}^2 = (\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2$ olur.

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{d_{ij} : (i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n)\} \quad (39.8)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$$

olacaktır.

Tanım 39.1.

$f(x, y)$ fonksiyonu düzlemde D bölgesinde tanımlı ve $(s_{ij}, t_{ij}) \in D_{ij}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &= \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(s_{ij}, t_{ij}) \Delta A_{ij} \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(s, t) \Delta A_{ij} \end{aligned}$$

limiti varsa, bu limite $f(x, y)$ fonksiyonunun D bölgesinde *iki katlı integrali* denilir.^{1 2 3}

Süreksizlik noktalarını atarak fonksiyonun sürekli olduğu bir D bölgesinde integralini tanımlayabiliriz. R dörtgensel bir bölge olmak üzere, $D \subset R$ ve f fonksiyonu D üzerinde sürekli olmak üzere

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

tanımını yapalım. Buradan

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA \quad (39.11)$$

çıkar.

¹ $f(x, y)$ fonksiyonu D bölgesinde sürekli ise, yukarıdaki limitler vardır. Dolayısıyla, bir bölgede sürekli olan iki değişkenli fonksiyonun o bölge üzerinde iki katlı integrali vardır.

² $f(x, y) \geq 0$ ise $z = f(x, y)$ yüzeyinin altında ve D bölgesinin üzerinde oluşan katı cismin hacmi

$$V = \iint_D f(x, y) dA \quad (39.9)$$

dır.

³ $f(x, y) = 1$ ise $z = f(x, y) = 1$ yüzeyinin altında ve D bölgesinin üzerinde oluşan katı cismin hacmi $V = A \times 1 = A$ olacağından, D bölgesinin alanı

$$A = \iint_D dA \quad (39.10)$$

olur.

39.1 İki Katlı İntegralin Özellikleri

KATLI İNTEGRAL KURALLARI

$f(x, y)$ ve $g(x, y)$ fonksiyonları D bölgesinde integrallenebilir ise,

1.

$$\iint_D \alpha f(x, y) dA = \alpha \iint_D f(x, y) dA \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (39.12)$$

2.

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dA = \iint_D f(x, y) dA \pm \iint_D g(x, y) dA \quad (39.13)$$

3.

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x, y) dA \\ &= \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA, \quad (D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset) \end{aligned}$$

4. Her $(x, y) \in D$ için $f(x, y) \leq g(x, y)$ ise

$$\iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D g(x, y) dA \quad (39.14)$$

5.

$$\left| \iint_D f(x, y) dA \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dA \quad (39.15)$$

olur.

Bunların ispatları iki katlı integral tanımından çıkarılabilir.

39.2 Ardışık İntegral

KATLI İNTEGRALI ART ARDA ALINAN TEK KATLI İNTEGRALLERE DÖNÜŞTÜRME

Çok katlı integral hesabı yaparken, tanımını kullanmak pratik değildir. Onun yerine katlı integrali tek katlı integrallerin art arda uygulanması haline dönüştürebiliriz. Bu yöntem işi çok kolaylaştırır. D bölgesi (39.5) gibi verilsin. Bu durumda

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx \quad (39.16)$$

eşitliği vardır.

Bu eşitlikte x le y değişkenlerinin sırası değiştirilebilir:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad (39.17)$$

Örnek 39.2.

$$\iint_D x^2 y dA \quad (39.18)$$

integralini $D = \{0 \leq x \leq 3; 1 \leq y \leq 2\}$ bölgesi üzerinde bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 y dA \\ &= \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \\ &= \int_0^3 \left(\int_1^2 x^2 y dy \right) dx \\ &= \int_0^3 \left(x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^2 \right) dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 y dA \\ &= \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dx dy \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^3 x^2 y dx \right) dy \\ &= \int_1^2 \left(y \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^3 \right) dy \\ &= \int_1^2 9y dy \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

olu.

Teorem 39.3. (FUBINI) $f(x, y)$ fonksiyonu $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ bölgesi üzerinde sürekli ise

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

eşitliği vardır.

4

⁴ 1870 yılında Venedik'te bir matematikçinin oğlu olarak dünyaya geldi. Matematiğe olan yeteneği onun öğrenimini ve çalışma hayatını belirledi. Matematiğin analiz, geometri, matematiksel fizik gibi değişik alanlarında çalıştı. Özellikle Dini ve Bianchi'den aldığı dersler onu kariyerin üst noktalarına getirdi. İtalya'nın önemli üniversitelerinde çalıştı. Faşizmin ve anti-semitizmin İtalya'da öne çıkmasıyla Fubini de istifaya zorlandı. Son yıllarını ABD'de Advanced Study Institute'de geçirdi. 1943 yılında yaşamını yitirdi.



Şekil 39.5: Guido Fubini(1870-1943)

Örnek 39.4. $D = \{1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde

$$\iint_D x^2 y^5 dA \quad (39.19)$$

integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 y^5 dA \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2 y^5 dy \right) dx = \frac{7}{18} \end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 x^2 y^5 dx \right) dy = \frac{7}{18}$$

Örnek 39.5.

$$f(x, y) = 2 \quad (39.20)$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4; 3 \leq y \leq 4\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\iint_D 2 dA = \int_3^4 \int_2^4 2 dx dy = 2 \int_3^4 4 dy = 8$$

Örnek 39.6.

$$f(x, y) = 6xy^2 \quad (39.21)$$

fonksiyonunun $D = \{[2, 4] \times [1, 2]\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm 1: $D = \{(x, y) : (x, y) \in [2, 4] \times [1, 2]\}$ ise,

$$\begin{aligned} \int \int_D 6xy^2 dA &= \int_2^4 \int_1^2 (6xy^2) dy dx \\ &= \int_2^4 (2xy^3) \Big|_1^2 dx \\ &= \int_2^4 14x dx \\ &= 7x^2 \Big|_2^4 \\ &= 84 \end{aligned}$$

integrallerin sırasını değiştirirsek,

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
 \iint_D 6xy^2 dA &= \int_1^2 \int_2^4 (6xy^2) dx dy \\
 &= \int_1^2 (3x^2y^2)|_2^4 dy \\
 &= \int_3^6 6y^2 dy \\
 &= 12y^3|_1^2 \\
 &= 84
 \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 39.7.

$$f(x, y) = 2x - 4y^3 \quad (39.22)$$

fonksiyonunun $D = \{-5, 4\} \times [0, 3]$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
 \iint_D 2x - 4y^3 dA &= \int_{-5}^4 \int_0^3 (2x - 4y^3) dy dx \\
 &= \int_{-5}^4 (2xy - y^4)|_0^3 dx \\
 &= \int_{-5}^4 (6x - 81) dx \\
 &= (3x^2 - 81x)|_{-5}^4 \\
 &= -756
 \end{aligned}$$

Örnek 39.8.

$$f(x, y) = 6xy, \quad (39.23)$$

fonksiyonunun $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x^2\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned}
 \iint_A f(x, y) dA &= \int_0^2 \int_0^{x^2} 6xy dy dx \\
 &= \int_0^2 (3xy^2)|_{y=0}^{x^2} dx \\
 &= \int_0^2 3x^5 dx \\
 &= \frac{1}{2}x^6|_0^2 \\
 &= \frac{1}{2}(64) - \frac{1}{2}(0) \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned}
 \iint_A f(x, y) dA &= \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 6xy dx dy \\
 &= \int_0^4 (3xy^2)|_{y=0}^{x^2} dy \\
 &= \int_0^4 3x^2y|_{y=0}^2 dx \\
 &= \int_0^4 3x^2y dy \Big|_{\sqrt{y}}^2 \\
 &= \int_0^4 (12y - 3y^2) dy \\
 &= (6y^2 - y^3)|_0^4 \\
 &= (6(4^2) - 4^3) - 6(0^2 - 0^2) \\
 &= 32
 \end{aligned}$$

Örnek 39.9.

$$f(x, y) = 6x^2y \quad (39.24)$$

f fonksiyonunun $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^3 \int_0^1 6x^2y dy dx \\
 &= \int_{-1}^3 3x^2y^2|_{y=0}^1 dx \\
 &= \int_{-1}^3 3x^2 dx \\
 &= x^3|_{-1}^3 \\
 &= 28
 \end{aligned}$$

Örnek 39.10.

$$f(x, y) = 6x^2y \quad (39.25)$$

f fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 3\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{-1}^3 6x^2y dy dx \\
 &= \int_0^1 3x^2y^2|_{-1}^3 dx \\
 &= \int_0^1 (27x^2 - 3x^2) dx \\
 &= \int_0^1 24x^2 dx \\
 &= \frac{24}{3}x^3|_0^1 \\
 &= 8x^3|_0^1 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

Örnek 39.11.

$$f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} \quad (39.26)$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 2\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_0^2 \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} dy dx &= \int_1^4 (\sqrt{x+4} - \sqrt{x}) dx \\ &= 2 (\sqrt{x+4} - \sqrt{x}) \Big|_1^4 \\ &= 2 (\sqrt{8} - \sqrt{4}) - (\sqrt{5} - \sqrt{1}) \\ &= 2 (2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{5} + 1) \\ &= 2 (2\sqrt{2} - \sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_1^4 \frac{y}{\sqrt{x+y^2}} dx dy &= \int_0^2 2y (\sqrt{4+y^2} - \sqrt{1+y^2}) dy \\ &= 2 (2\sqrt{2} - \sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

Örnek 39.12.

$$f(x, y) = xy \quad (39.27)$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$, bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} &= \iint_D xy dA = \int_0^1 \int_0^3 xy dy dx \\ &= \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 dx \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{9}{2} - 0 \right) dx \\ &= \frac{9}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Örnek 39.13.

$$f(x, y) = \sqrt{xy} \quad (39.28)$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 4 \leq y \leq 9\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^4 \int_4^9 \sqrt{xy} \, dy \, dx \\
 &= \int_1^4 \int_4^9 \sqrt{x} \sqrt{y} \, dy \, dx \\
 &= \int_1^4 \sqrt{x} \int_4^9 \sqrt{y} \, dy \, dx \\
 &= \frac{2}{3} \int_1^4 \sqrt{x} y^{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 \, dx \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) 19 \sqrt{x^3} \Big|_1^4 \\
 &= \left(\frac{4}{9}\right) 19(8-1) \\
 &= \frac{532}{9}
 \end{aligned}$$

Örnek 39.14.

$$f(x, y) = ye^x \quad (39.29)$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \int_{-1}^1 ye^x \, dy \, dx &= \int_0^2 e^x \frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^1 \, dx \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \int_0^2 e^x \, dx \\
 &= 0 \\
 \int_{-1}^1 \int_0^2 ye^x \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 ye^x \Big|_{x=0}^2 \, dx \\
 &= \int_{-1}^1 y(e^2 - 1) \, dy \\
 &= (e^2 - 1) \frac{y^2}{2} \Big|_{y=-1}^1 \\
 &= (e^2 - 1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Aşağıdaki integrallerde integral sırası önem kazanmaktadır. Hesabı kolaylaştıran integral sırasını belirleyerek integrali hesaplayınız.

a) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2\}$, $\int \int_D xe^{xy} \, dA$

$$\begin{aligned}
\iint_D x e^{xy} dA &= \int_0^1 \int_1^2 x e^{xy} dy dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_1^2 e^{xy} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx \\
&= \left. \frac{e^{2x}}{2} - e^x \right|_0^1 \\
&= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinde

$$\iint_D \frac{x}{1+xy} dA$$

integralini hesaplayınız.

$u = 1 + xy, du = x dy$ konumuyla;

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{1+xy} dA &= \int_0^1 \ln(1+xy) \Big|_0^1 dx \\
&= \int_0^1 [\ln(1+x) - \ln 1] dx \\
&= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\
&= (x+1)(\ln(x+1) - 1) \Big|_0^1 = 2(\ln 2 - 1) - (1)(-1) = 2\ln 2 - 2 + 1
\end{aligned}$$

Verilen denklemlerin grafikleri ile sınırlanan bölgeyi grafikte gösteriniz ve küme gösterimiyle, düzgün x-bölgesi (Tip I) ve/veya düzgün y-bölgesi (Tip II) olarak ifade ediniz.

a) $y = 5 - x^2, y = 1$

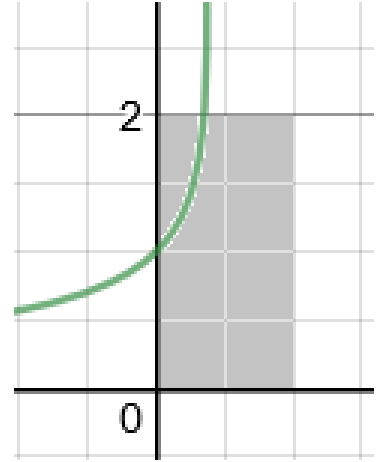
$$\begin{aligned}
D &= \{(x, y) | -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 5 - x^2\} \\
&= \{(x, y) | 1 \leq y \leq 5, -\sqrt{5-y} \leq x \leq \sqrt{5-y}\}
\end{aligned}$$

b) $y = x^2, y = 4$

$$\begin{aligned}
D &= \{(x, y) | -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\} \\
&= \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\}
\end{aligned}$$

c) $y = x^2 - 6x + 8, x + y = 8$

$$\begin{aligned}
D &= \{(x, y) | y = x^2 - 6x + 8, x + y = 8\} \\
&= \{(x, y) : 0 \leq x \leq 5, x^2 - 6x + 8 \leq y \leq 8 - x\} \\
&= \{(x, y) : -1 \leq y \leq 3, 3 - \sqrt{1+y} \leq x \leq 3 + \sqrt{1+y}\} \\
&\cup \{(x, y) : 3 \leq y \leq 8, 3 - \sqrt{1+y} \leq x \leq 8 - y\}
\end{aligned}$$



Şekil 39.6: Bölüntü

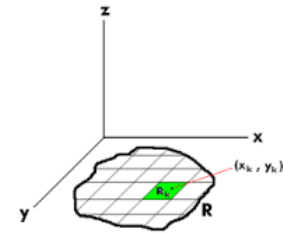
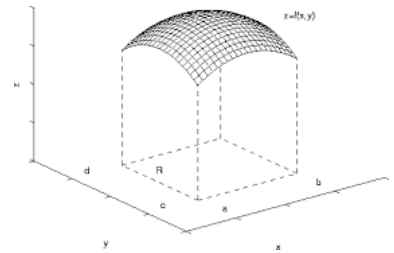


Fig. 1

Şekil 39.7: Bölüntü



Şekil 39.8: Yüzey Altında Hacim

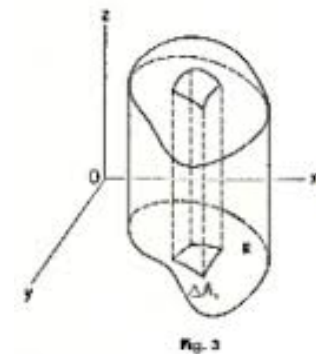


Fig. 3

Şekil 39.9: Sütünlarm Oluşumu

d)

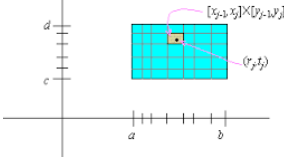
$$y = 5 + 4x - x^2, \quad x + y = 5$$

$$y = 5 + 4x - x^2, \quad x + y = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x$$

$$\Rightarrow x(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$



Şekil 39.10: Bölüntü

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, \quad -x + 5 \leq y \leq 5 + 4x - x^2\}$$

Köşeleri (1, 1), (3, 3), (4, 3) ve (5, 2) noktalarında olan dörtgensel bölge D olsun. D yi sadece sınır noktalarında ortak noktaları bulunan düzgün bölgelerin birleşimi olarak ifade ediniz.

$$a) \int \int_D 24x \, dA$$

$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \int \int_D 24x \, dA &= \int \int_{D_1} 24x \, dA_1 + \int \int_{D_2} 24x \, dA_2 + \int \int_{D_3} 24x \, dA_3 \\ &= \int_1^3 \int_{\frac{x}{4} + \frac{3}{4}}^x 24x \, dy \, dx \end{aligned}$$

olur.

$D = D_4 \cup D_5$ alınırsa,

$$\begin{aligned} I &= \int \int_D 24y \, dA = \int \int_{D_4} 24y \, dA_4 + \int \int_{D_5} 24y \, dA_5 \\ &= \int_1^2 \int_y^{4y-3} 24y \, dx \, dy \\ &\quad + \int_3^4 \int_y^{7-y} 24y \, dx \, dy \end{aligned}$$

olur

İntegrasyon bölgesi verilmiş olan çift katlı integrali hesaplayınız.

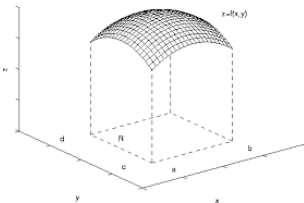
$$a) D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 2\}, \quad \int \int_D (x^2 + xy) \, dA$$

$$\int_0^2 \int_0^{2x} (x^2 + xy) \, dy \, dx = 16$$

$$b) D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \int \int_D (24xy^3) \, dA$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^y 24xy^3 \, dx \, dy &= \int_0^1 12x^2y^3 \Big|_0^y \, dy \\ &= \int_0^1 12y^3(y^2 - 0) \, dy \\ &= \int_0^1 12y^5 \, dy \\ &= 2y^6 \Big|_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$c) D = \{(x, y) : y^2 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \int \int_D \sqrt{xy} \, dA$$



Şekil 39.11: Riemann toplamı

$$\int_0^1 \int_{y^2}^y \sqrt{xy} dx dy = \frac{2}{27}$$

c) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$, $\int \int_D ye^x dA$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{y^2} ye^x dx dy &&= \int_0^1 e^x y \Big|_{x=0}^{y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

d) $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$, $\int \int_D e^{x+y} dA$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^x e^{x+y} dy dx \\ I &= \int_0^1 \int_0^x e^x \cdot e^y dy dx \\ &= \int_0^1 e^x \cdot e^y \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1)^2 \end{aligned}$$

İNTEGRAL SIRASINI DEĞİŞTİRME

Aşağıdaki inegrallerde integrasyon bölgesinin grafiğini çizerek integral sırasını değiştiriniz.

a) $\int_0^1 \int_{x^4}^{x^3} f(x, y) dy dx$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{x^4}^{x^3} f(x, y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

Aşağıdaki integralleri integrali sırasını değiştirerek hesaplayınız (integral sırasını değiştirmeden hesaplamayı denemeyiniz!)

a)

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx &= \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy \\
 &= \int_0^1 e^{y^2} x \Big|_0^y dy \\
 &= \int_0^1 ye^{y^2} dy \\
 &= \frac{e^{y^2}}{2} \Big|_0^y \\
 &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(e-1)
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \int_{y^2}^1 2ye^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 2ye^{x^2} dy dx \\
 &= \int_0^1 12e^{x^2} \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{\sqrt{x}} dx \\
 &= 6 \int_0^1 e^{x^2} x dx \\
 &= 3e^{x^2} \Big|_{x=0}^1 \\
 &= 3(e-1)
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 \int_{y^2}^4 \frac{4y}{1+x^2} dx dy \\
 &= \int_0^4 \frac{1}{1+x^2} 2y^2 \Big|_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^4 \frac{2y^2}{1+x^2} \Big|_0^{\sqrt{x}} dx \\
 &= \int_0^4 \frac{2x}{1+x^2} dx \\
 &= \ln(1+x^2) \Big|_0^4 \\
 &= \ln(17) - \ln(1) \\
 &= \ln(17)
 \end{aligned}$$

ç)

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^2 2\sqrt{1+2y^2} dy dx &= \int_0^2 \int_0^{2y} 2\sqrt{1+2y^2} dx dy \\
&= \int_0^2 2\sqrt{1+2y^2} x \Big|_0^{2y} dy \\
&= \int_0^2 \sqrt{1+2y^2} 4y dy \\
&= \frac{2}{3} \sqrt{(1+2y^2)^3} \Big|_0^2 \\
&= \frac{2}{3} (\sqrt{9^3} - 1) \\
&= \frac{2}{3} (26) \\
&= \frac{52}{3}
\end{aligned}$$

b) $\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy dx$$

c) $\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} f(x, y) dy dx$

$$\int_0^2 \int_{x^3}^{4x} f(x, y) dx dy = \int_0^8 \int_{y/4}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dy dx$$

ç) $\int_0^8 \int_{\frac{y}{4}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x, y) dx dy$

$$\int_0^8 \int_{y/4}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_{2x^2}^{4x} f(x, y) dy dx$$

İntegrasyon bölgesi D verilen denklemlerin grafikleri ile sınırlanan çift katlı integrali hesaplayınız.

a) $D = \{(x, y) : y = x^3, y = x^2\}$ ile sınırlı, $\iint_D y^2 dA$

$$\begin{aligned}
\iint_D y^2 dA &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y^2 dy dx \\
&= \int_0^1 \frac{y^3}{3} \Big|_{x^3}^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^6 - x^9) dx \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} \right] \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{70}
\end{aligned}$$

b) $D = \{(x, y) : y^2 = 2x, y^2 = 8 - 2x \text{ ile sınırlı } \}$, $\iint_D (4 - y^2) dA$

$$\begin{aligned}
\iint_D (4-y^2) dA &= 2 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x}} (4-y^2) dy dx \\
&+ 2 \int_2^4 \int_0^{\sqrt{8-2x}} (4-y^2) dy dx \\
&= 2 \left(\frac{128}{15} + \frac{128}{15} \right) \\
&= \frac{512}{15}
\end{aligned}$$

c)

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \leq 2\}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{x^2} dA &= \int_0^2 \int_0^{x/2} e^{x^2} dy dx \\
&= \int_0^2 e^{x^2} y \Big|_0^{x/2} dx \\
&= \int_0^2 e^{x^2} \frac{x}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^2 x e^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{4} (e^4 - 1)
\end{aligned}$$

ç) $D = \{(x, y) : x = 0, x = 2y, y = 1\}$ ile sınırlı bölge, $\iint_D e^{-\frac{y}{2}} dA$

$$\begin{aligned}
\iint_D e^{-\frac{y}{2}} dA &= \int_0^2 \int_{x/2}^1 e^{-\frac{y}{2}} dy dx \\
&= \int_0^2 -2e^{-y/2} \Big|_{x/2}^1 dx \\
&= -2 \left(\int_0^2 e^{-1/2} - e^{-x/4} \right) dx \\
&= -2 \left(\int_0^2 x e^{-1/2} + 4e^{-x/2} \right) dx \\
&= -2 \left[\left(\frac{2}{\sqrt{e}} + \frac{4}{e} \right) - (0+4) \right] \\
&= 8 - \frac{4}{\sqrt{e}} - \frac{8}{e} \\
&= \frac{8e - 4\sqrt{e} - 8}{e}
\end{aligned}$$

39.3 Katlı İntegral Uygulamaları

NEDEN İNTEGRAL SIRASINI DEĞİŞTİRİYORUZ?

Katlı integrali ardışık integral (iterated) haline getirebildiğimiz durumlarda, birisini öne ya da sona almak çoğu kez önem taşımaz. Ama bazı durumlarda birisini öne almanın kolaylık sağladığı görülebilir. Bununla ilgili bazı örnekler vereceğiz.

Teorem 39.15. $D = \{a \leq x \leq b; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ bölgesi üzerinde $f(x, y)$

fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

olur.

Değişkenlerin yerleri değiştirilirse, benzer sonuç elde edilebilir:

$D = \{c \leq y \leq d; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ bölgesi üzerinde $f(x, y)$ fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

olur.

İspat: Ardışık integral tanımından çıkarılır.

Örnek 39.16. $D = \{y = 0, y = 2x, x = 1\}$ doğruları ile sınırlı bölge ise

$$\iint_D (x + y) dA \quad (39.30)$$

integralini bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x + y) dA \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x + y) dy \right) dx = \frac{4}{3} \\ &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^1 (x + y) dx \right) dy = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Örnek 39.17.

$$I = \int_0^2 \int_1^{e^x} f(x, y) dy dx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştiriniz.

Çözüm :

$$I = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 f(x, y) dx dy$$

Örnek 39.18.

$$I = \int_{-1}^2 \int_{x^2-2}^x f(x, y) dy dx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştiriniz.

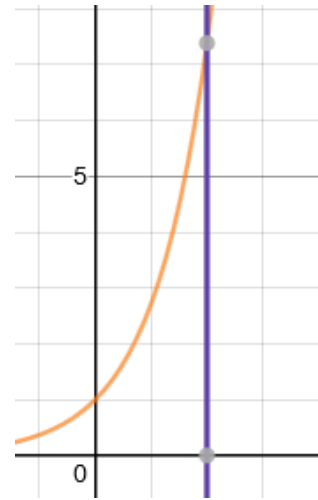
Çözüm :

$$I = \int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{y+2}}^{\sqrt{y+2}} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^2 \int_y^{\sqrt{y+2}} f(x, y) dy dx$$

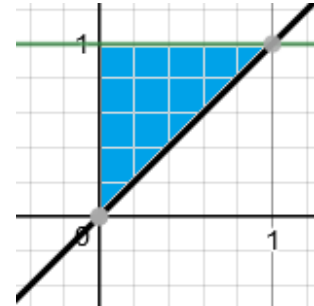
Örnek 39.19.

$$I = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$$

integralini hesaplayınız..



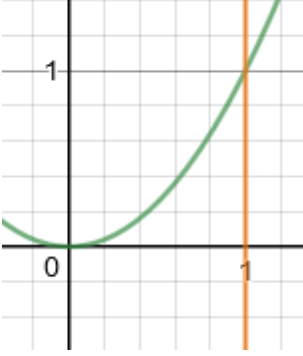
Şekil 39.12: $D = \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq e^x\}$



Şekil 39.13: $0 \leq x \leq 1, y = x$

Çözüm :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx dy \\ &= \int_0^1 y e^{y^2} dy \\ &= \frac{e-1}{2} \end{aligned}$$



Şekil 39.14: $0 \leq x \leq 1$ $y = x^2$

Örnek 39.20.

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x+y) dy dx$$

integralinin ardışık integral sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm :

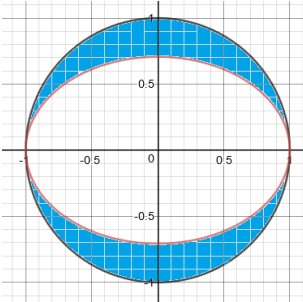
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y) dx dy \\ &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

Örnek 39.21. D bölgesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ile $x^2 + 2y^2 = 1$ elipsi ile sınırlı bölge ise

$$I = \iint_D x^2 dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : şekilden görüldüğü gibi $D = D_1 \cup D_2$ olarak iki parçaya ayırabiliriz.



Şekil 39.15: $x^2 + y^2 = 1$ $x^2 + 2y^2 = 1$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 dA = \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\ &= \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dy dx + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} x^2 dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 x^2 \left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x^2}{2}} \right) dx \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx, \quad (x = \sin t, dx = \cos t dt) \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{\pi}{16} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Örnek 39.22. D bölgesi birinci dörtte birlik alanda $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8$ eğrileri ile sınırlı bölge ise

$$I = \iint_D x^2 dA$$

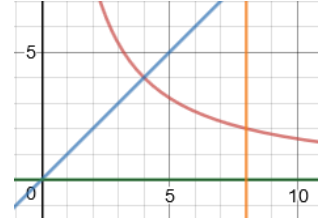
integralini hesaplayınız.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 dA = \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\ &= \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2 dx dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{3} \int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3} \right) dy + \frac{1}{3} \int_0^2 (8^3 - y^3) dy \\ &= 448 \end{aligned}$$

Çözüm 2:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D x^2 dA = \iint_{D_1} x^2 dA + \iint_{D_2} x^2 dA \\ &= \int_0^4 \int_0^x x^2 dy dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2 dy dx \\ &= 448 \end{aligned}$$



Şekil 39.16: $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8$

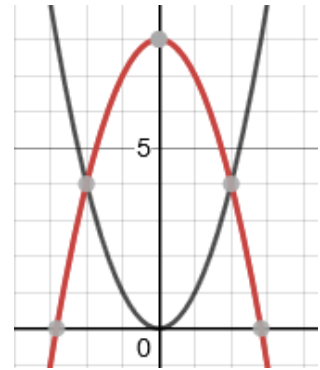
Örnek 39.23. D bölgesi $y = x^2, y = 8 - x^2$ eğrileri ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

$$\text{Alan} = \iint_D dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm 1:

$$\begin{aligned} I &= \iint_D dA = \iint_{D_1} dA + \iint_{D_2} dA \\ &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^{8-x^2} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 ((8-x^2) - x^2) dx \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

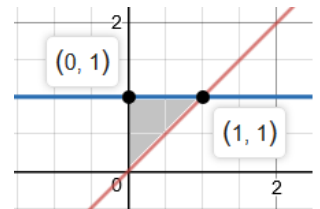


Şekil 39.17: $y = x^2, y = 8 - x^2$

Örnek 39.24.

$$f(x, y) = e^{\frac{x}{y}} \quad (39.31)$$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y; 0 \leq y \leq 1\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.



Şekil 39.18: $D = \{(X, y) : 0 \leq x \leq y; 0 \leq y \leq 1\}$

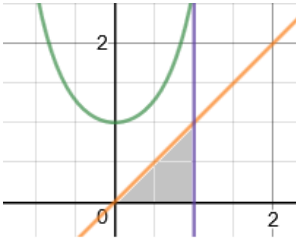
Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{\frac{x}{y}} dA &= \int_0^1 \int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx dy \\
 &= \int_0^1 (ye^{\frac{x}{y}} \Big|_0^y) dy \\
 &= \int_0^1 (ye - y) dy \\
 &= (e-1) \int_0^1 y dy \\
 &= \frac{1}{2}(e-1)y^2 \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}(e-1)
 \end{aligned}$$

Burada intgralin sırasını değiştirirsek $\int \frac{x}{y} dy$ integralini hesaplayamayız.

Örnek 39.25.

$$f(x, y) = e^{x^2} \quad (39.32)$$



Şekil 39.19: $D = \{0 \leq y \leq x; 0 \leq x \leq 1\}$

fonksiyonunun $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x; 0 \leq x \leq 1\}$ bölgesi üzerinden integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \iint_D e^{x^2} dA &= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx \\
 &= \int_0^1 (ye^{x^2} \Big|_0^x) dx \\
 &= \int_0^1 (xe^{x^2}) dx, \quad (u = x^2, du = 2x dx) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^u du \\
 &= \frac{1}{2}(e-1)
 \end{aligned}$$

Burada intgralin sırasını değiştirirsek

$$\int e^{x^2} dx$$

integralini hesaplayamayız.

39.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki katlı hesaplayınız.

1. $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx$
2. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \cos y^3 dy dx$
3. $\int_0^1 \int_y^1 \sin x^2 dx dy$
4. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$
5. $\int_0^4 \int_y^{2y} (x+e^y) dx dy$
6. $\int_{-1}^2 \int_x^{x^2+1} (xy) dy dx$
7. $\int_0^{1/2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx dy$
8. $\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} x^2 y dy dx$
9. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x-y) dx dy$
10. $\int_0^1 \int_0^{2y} e^{-y^2} dx dy$
11. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x dy dx$
12. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x dx dy$

39.5 Katlı integralde değişken değiştirme

Tek değişkenlilerde olduğu gibi, bazı durumlarda değişken değiştirerek katlı integral daha kolay hesaplanabilir hale dönüştürülebilir. Aslında katlı integrali ardışık integraller olarak hesaplanabildiğine göre, değişken değiştirmeyi tek değişkenli integrallerde yaptığımızın tekrarı olacaktır. Yine de bu dönüşümün yapılabilmesini mümkün kılan teoremi ifade etmekte yarar vardır.

Teorem 39.26. 1. $f(x, y)$ fonksiyonu xy -düzlemindeki bir D bölgesinde sürekli olsun.

2. Düzlemden tanımlı bir T dönüşümü

$$T : \begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

parametrik biçimde verilsin.

3. g ve h fonksiyonları D^* üzerinde sürekli olsunlar.

4. T dönüşümü bire-bir örten olacak biçimde D bölgesini D^* bölgesine dönüştürsün.

5.

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (39.33)$$

6. $J(u, v) \neq 0$ *varsayıları sağlanıyorsa*

$$\iint_D f(x, y) dy dx = \iint_{D^*} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (39.34)$$

dir.

İspat: T dönüşümü uv -düzlemindeki bir (u, v) noktasını xy -düzlemindeki (x, y) noktasına götüren dönüşümdür. g, h fonksiyonları D^* bölgesinde tanımlı ve sürekli türevlere sahip fonksiyonlardır. T dönüşümünü vektör değerli bir fonksiyon imiş gibi düşünebiliriz. $(0, 0)$ baş noktasını (x, y) noktasına birleştiren vektörü $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ya da $\vec{r} = g(u, v)\vec{i} + h(u, v)\vec{j}$ biçiminde yazabiliriz. g, h fonksiyonları süreli türevlere sahip olduğuna göre $\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v}, \frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}$ kısmi türevleri var ve süreklidirler. $u = u_0$ ve $v = v_0$ eğrilerinin teğet vektörleri $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ olacaktır.

T dönüşümü altında boyutları $\Delta u \times \Delta v$ olan dikdörtgen xy -düzleminde biçemi bozulmuş dikdörtgenimsi bir bölgeye dönüşür. Bunun alanı yaklaşık olarak,

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$$

olur. Ayrıca,

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = k \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

olur. Buradan,

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

elde edilir. Şimdi integral tanımına dönersek,

$$\sum f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

toplamının limiti varsa, bu limit

$$\iint_D f(x, y) dy dx$$

integraline eşit olacaktır. O halde,

$$\iint_D f(x, y) dy dx = \iint_{D^*} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (39.35)$$

çıkar. Simgelerde birliği sağlamak için,

$$\begin{aligned} dA &= dx dy \\ &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \end{aligned}$$

olduğunu vurgulamak yeterlidir.

Örnek 39.27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ ile sınırlı D bölgesinin alanını değişken değiştirme yöntemi ile bulunuz.

Çözüm: $x = au$, $y = bv$ değişken değişimini yaparsak, D bölgesi $u^2 + v^2 \leq 1$ açık diskinde dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (39.33) uygulanabilir. ($a > 0$, $b > 0$ olmak üzere)

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \left| \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} \right| = ab dudv$$

olur. Dolayısıyla,

$$\iint_D 1 dxdy = \iint_{D^*} ab dudv = ab(\pi 1^2) = \pi abbr^2$$

çıkar.

Örnek 39.28. Köşeleri $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ olan D üçgeninin üzerinde,

$$\iint_D (x+y)^3 dxdy$$

integralini değişken drğiştirimi yaparak bulunuz.

Çözüm: $u = y - x$, $v = y + x$ değişken değişimini yaparsak, D bölgesi köşeleri $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 2)$ olan D^* üçgenine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (39.33) uygulanabilir.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

dir. Buradan,

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \frac{1}{2} dudv$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^3 dxdy &= \iint_{D^*} \frac{1}{2} v^3 dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^0 v^3 dudv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 v^4 dv \\ &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Örnek 39.29. Köşeleri $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$ olan D üçgeninin üzerinde,

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$$

integralini değişken drğiştirimi yaparak bulunuz.

Çözüm:

$$u = y - x, v = y + x \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(v - u) \Rightarrow u = v, u = -v, v = 2$$

D bölgesi köşeleri $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ olan D^* üçgenine dönüşür. Bunu yapan parametrik dönüşümler sürekli türevlenebilir. Dolayısıyla Teorem (39.33) uygulanabilir.

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy &= \iint_{D^*} \frac{1}{2} e^{\frac{u}{v}} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du dv \\ &= \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \int_0^2 v dv \\ &= e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

39.6 Alıştırmalar

1. Köşeleri $(1, 0), (2, 0), (0, -2), (0, -1)$ olan D yamuğu üzerinde,

$$\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dx dy$$

integralini bulunuz.

2. $x - 2y = 0, x - 2y = 4, 3x - y = 1, 3x - y = 8$ doğrularının sınırladığı D bölgesi üzerinde,

$$\iint_D \frac{x-2y}{3x-y} dA$$

integralini hesaplayınız.

3. Köşeleri $(1, 0), (2, 0), (0, 2), (0, 1)$ olan D yamuğu üzerinde,

$$\iint_D \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$$

integralini hesaplayınız.

4. $D = \{(x, y) : \pi < x + y < 2\pi, -\pi < x - y < \pi\}$ bölgesi üzerinden,

$$\iint_D (x^2 - y^2) \sin^2(x + y) dx dy$$

integralini hesaplayınız.

5. $9x^2 + 4y^2 = 1$ elipsi üzerinden,

$$\iint_D \sin(9x^2 + 4y^2) dA$$

integralini hesaplayınız.

6. $|x| + |y| \leq 1$ eitsizliği ile belirlenen D bölgesi üzerinden,

$$\iint_D e^{x+y} dA$$

integralini hesaplayınız.

7. Köşeleri $(0, 0), (2\pi, 0), (0, \pi)$ olan D üçgeni üzerinden,

$$\iint_D \sin(x + 2y) \cdot \cos(x - 2y) dA$$

integralini hesaplayınız.

8. $y = x^2, y = 4x^2, xy = 1, xy = 5$ eğrilerinin sınırladığı D bölgesi üzerinden,

$$\iint_D xy dA$$

integralini hesaplayınız.

39.7 İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı

1. Pappus teoremini kullanarak dik dairesel koninin yanal yüzeyinin alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm:

Genel olması için koninin yüksekliği olarak herhangi bir r sayısı alalım. Koninin simetri doğrusu Oy - eksenini olacak şekilde tepe noktasını $(0, 0)$ başlangıç noktasına koyalım. Koni şeklinde görüldüğü gibi baş aşağı konumlanmış olsun.

Koninin yanal yüzeyindeki $|OB|$ doğru parçasını kütle merkezi, $|OB|$ bin orta noktasıdır: $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}h)$ dir (bkz.). Alan

$$\begin{aligned} A &= |OB| \cdot 2\pi R = 2\sqrt{r^2 + h^2} \cdot \pi \frac{r}{2} \\ &= \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \end{aligned}$$

OAB üçgeninin kütle merkezi $(\frac{r}{3}, \frac{h}{2})$ dir. Hacim

$$V = (2\pi R) \frac{rh}{2} = 2i \frac{r}{3} \cdot \frac{rh}{2} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

olur.

2. Pappus'un ikinci teoremini kullanarak $y = \sqrt{r^2 - x^2}, -r \leq x \leq r$ yayının kütle merkezini bulunuz.

Çözüm:

Pappus'un ikinci teoremini kullanacağız. Kürenin alanının $4\pi r^2$ olduğunu biliyoruz. Buna göre;

$$\bar{x} = 0, \quad (39.36)$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\int \bar{y} dm}{\int dm} \\ &= \frac{\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{-t1 + y^2} dx}{ds} \\ &= \frac{\int \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx}{\int \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx} \\ &= \frac{\int_{-r}^r r dx}{\int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx} \\ &= \frac{2r^2}{\pi r} \\ &= \frac{2r}{\pi} \end{aligned}$$

Yüzey Alanı S:

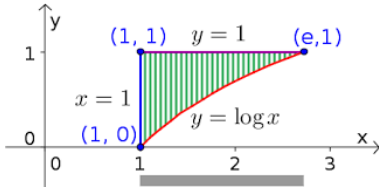
$$S = (r\pi)2\pi\left(\frac{2r\pi}{\pi}\right) = 4\pi r^2 \quad (39.37)$$

çıkarak. Buunu daha kısa yolla yapabiliriz.

$$4\pi r^2 = (r\pi)2\pi\bar{y} \\ \Rightarrow \bar{y} = \frac{2}{\pi}r$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Şekil 39.20: Soru7-11a



Şekil 39.21: $xy = 5, x + y = 6$

$$\int_a^b f(x)dx$$

Şekil 39.22: $y = x, y = x^3$

Verilen iki denklemin grafikleri arasında kalan bölgenin alanını çift katlı integralle hesaplayınız.

a) $y = \frac{x^2}{4}, y = \frac{1}{2}x + 2$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_{-2}^4 \int_{x^2/4}^{2+x/2} dy dx \\ &= \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \left(4 + 8 - \frac{64}{8} \right) * \left(1 - 4 + \frac{8}{12} \right) \\ &= 15 - 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

b) $xy = 5, x + y = 6$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= \int_1^5 \int_{5/x}^{6-x} dy dx \\ &= \int_1^5 \left((6-x) - \frac{5}{x} \right) dx \\ &= \left(6 - \frac{x^2}{2} - 5\ln(x) \right) \Big|_1^5 \\ &= \left(30 - \frac{25}{2} - 5\ln 5 \right) - \left(6 - \frac{1}{2} - 5\ln 1 \right) \\ &= 30 - 18 - 5\ln 5 \\ &= 12 - 5\ln 5 \\ &= 9 \end{aligned}$$

c) $y = x, y = x^3$

$$\begin{aligned} \text{Alan} &= 2 \int_0^1 \int_{x^3}^x dy dx \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^3) dx \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Örnek

r yarıçaplı bir çember, çember düzleminde ve çember merkezine b , ($b > r$) uzaklıkta sabit duran bir eksen etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin (simit, torus, daughnut) yüzey alanını ve hacmini bulunuz.

Çözüm:

Çemberin ağırlık merkezi kendi merkezidir. Çemberin merkezi eksen etrafında bir dönüş yapınca $2\pi b$ kadar yol alır. Çemberin alanı πr^2 dir. Pappus teoremine göre hacim

$$V = (2\pi b)(\pi r^2) = 2\pi^2 br^2$$

olur, yüzey alanı ise

$$S = (2\pi b)(2\pi r) = 4\pi^2 br$$

olur.

39.8 Alıştırmalar

- $x = a$, $y = a$ karesinden a yarıçaplı çember çıkarılıyor. Geri kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.
- $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = x$ eğrileri ile sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

3. ,

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx$$

integralini hesaplayınız.

4.

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos x^2 dx dy$$

integralini hesaplayınız.

5.

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{(16+x^7)}} dx dy$$

6.

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos x^2 dx dy$$

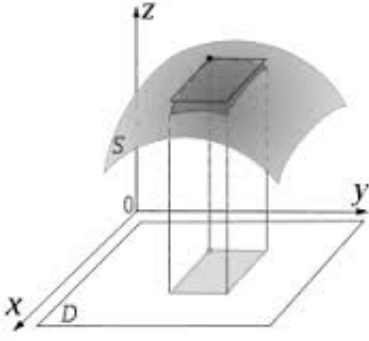
integralini hesaplayınız.

- $y = \frac{x^3}{3}$, $y = x + 4$, $y = -4x + 9$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.
- $x^2 + z^2 = 9$ silindiri $y = 2x$ düzlemi kesiyor. Birinci bölgede silindirden ayrılan parçanın hacmini bulunuz.
- $x = -y^2$, $y - x = 2$ eğrileri ile sınırlanan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.

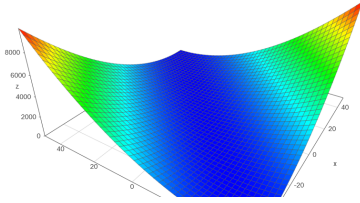
39.9 İki Katlı İntegral İle Hacim hesapları

Bu kesimde iki ya da daha çok yüzey ile sınırlanan hacimleri hesaplayacağız. Uygulamada çoğunlukla yüzeylerden birisi xy -düzleminde düzgün eğrilerle sınırlanmış düzlemsel bir bölge olur ve yanal yüzeyler sözkonusu bölgenin sınırlarını doğrultman olarak kabul eden ve ayrıtları düzlemsel bölgeye dik olan bir silindirdir. Silindirin bir kapağı düzlemsel bölgedir, öteki kapak silindir ile başka bir yüzeyin arakesiti tarafından belirlenir.

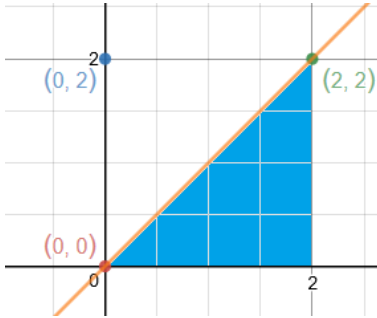
Örnek 39.30. Köşeleri $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ olan D üçgeni ile $z = x + y$ yüzeyi arasındaki hacmi bulunuz.



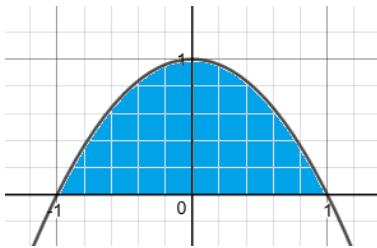
Şekil 39.23: Yüzeyle sınırlanan hacim



Şekil 39.24: $z = (x - y)^2$ yüzeyi



Şekil 39.25: Üçgen
köşeleri: $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$



Şekil 39.26: Köşeleri: $y = 1 - x^2$

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D (x+y) dA \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) dy dx \\
 &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{1-x} dx \\
 &= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[\frac{-x^2}{2} + \frac{1}{2} \right] dx \\
 &= \frac{-x^3}{6} + \frac{x}{2} \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{4}{12} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$y = 1 - x^2$ ve $y = 0$ ile sınırlanan D bölgesi ile $z = 4$ düzlemi arasında kalan hacim.

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D 4 dA \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} 4 dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 4y \Big|_{y=0}^{1-x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 4(1-x^2) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (4-4x^2) dx \\
 &= 2 \left(4x - \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\
 &= \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

39.10 Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller

Kutupsal koordinatlara dönüşümü incelerken

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

dönüşümü ile xOy- dikey kartezyen koordinat sisteminden (r, θ) kutupsal koordinat sistemine nasıl dönüşüm yapıldığını incelemiştik. Bu kesimde, bu dönüşümün katlı integrallerde kullanılmasını ele alacağız.

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

ve

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \right| = r$$

çıkar. Öyleyse aşağıdaki teoremi söyleyebiliriz:

Teorem 39.31. $D = \{(r, \theta) \mid a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi\}$ bölgesinde f fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (39.38)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Önceki kesimde ifade edilen dönüşüm Teorem'inin varsayımları sağlandığından, sözkonusu teoremin burada geçerli olacağı açıktır. \square

Örnek 39.32. $x^2 + y^2 \leq 4$ kapalı diski üzerindeki

$$\iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2 + 1) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 + 1) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^2 d\theta \\ &= 12\pi \end{aligned}$$

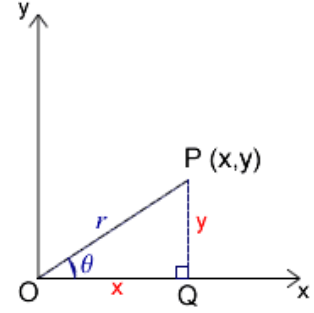
Örnek 39.33. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = e^2$ çemberleri arasında kalan D halka bölgesi üzerindeki

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) dA$$

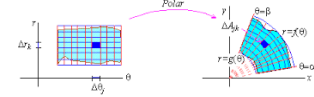
katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm:

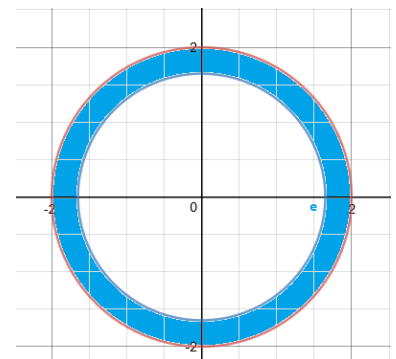
$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dA &= \int_0^{2\pi} \int_2^e \ln(r^2) r dr d\theta \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right) \Big|_2^e \\ &= \pi(e^2 + 4 - 8 \ln 2) \end{aligned}$$



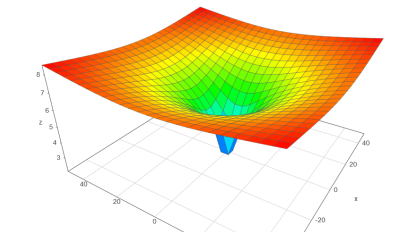
Şekil 39.27: Kutupsal koordinatlar



Şekil 39.28: Dönüşüm



Şekil 39.29: Halka bölgesi



Şekil 39.30: $\ln(x^2 + y^2)$ yüzeyi

Teorem 39.34.

$$R = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), r_1(\theta) \geq 0, r_2(\theta) \geq 0\}$$

bölgesinde f fonksiyonu sürekli ise

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta \quad (39.39)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 39.35. a yarıçaplı kürenin hacmini kutupsal koordinatları kullanarak hesaplayınız.

Çözüm: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin xy -düzleminin üstünde kalan yarısını hacmini bulup çıkarı 2 ile çarpabiliriz.

$$z \geq 0, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

dir. Yarı kürenin xy düzlemi üzerindeki izdüşümü

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

ir. Buradan,

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dx = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^a d\theta \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left((a^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2 - 0^2)^{\frac{3}{2}} \right) d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} a^3 d\theta \\ &= \frac{2}{3} (a^3 \theta) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

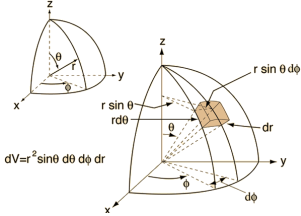
Örnek 39.36. D bölgesi birinci dördte birlik (first quadrant) bölgede $r = 3 \cos \theta$ diskinden, $r = 1 + \cos \theta$ kalp eğrisi (cardioid) atılınca geri kalan bölge olsun.

$$\iint_D \frac{1}{x} dA$$

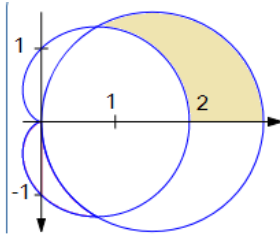
kathı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm: $3 \cos \theta = 1 + \cos \theta \Rightarrow 2 \cos \theta = 1, \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ olduğundan,

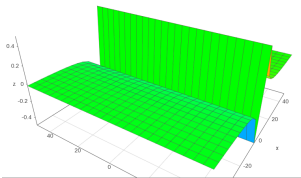
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{x} dA &= \int_0^{\pi/3} \int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \frac{1}{r \cos \theta} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} \int_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} \sec \theta dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} r \sec \theta \Big|_{1+\cos\theta}^{3\cos\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} (3 \cos \theta \sec \theta - (1 + \cos \theta) \sec \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/3} (2 - \sec \theta) d\theta \\ &= 2\theta - \ln |\sec \theta + \tan \theta| \Big|_0^{\pi/3} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$



Şekil 39.31: Kürenin hacmi



Şekil 39.32: Alan



Şekil 39.33: $z = \frac{1}{x}$ yüzeyi

Örnek 39.37. D bölgesi birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgesi olsun. Bu sınırsız bölgede,

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dA$$

katlı integralini kutupsal koordinatlara dönüşüm yaparak hesaplayınız.

Çözüm: Bu has olmayan bir integraldir. Öyleyse, Kutupsal koordinat sistemine geçerek,

$$\begin{aligned} \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dA &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^n e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^n \right) d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2} e^{-n^2} + \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (1 - e^{-n^2}) \cdot \theta \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-n^2}) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Örnek 39.38.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\ I_a &= \int_0^a e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

dersek, değişken adını serbestçe seçebildiğimizi de düşünerek,

$$\begin{aligned} (I_a)^2 &= \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^a e^{-y^2} dy \right) \\ &= \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (\text{önceki problemden}) \end{aligned}$$

çıkar. Önceki problemin sonucunun bilinmediğini, varsayarak çözümü bulabiliriz. Şimdi, birinci dörtte birlik (first quadrant) bölgede R_1 bölgesi a yarıçaplı disk, R bölgesi kenar uzunluğu a olan kare, R_2 bölgesi $\sqrt{2}a$ yarıçaplı disk olmak üzere,

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

yazabiliriz. Kutupsal koordinatları kullanırsak,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^a e^{-r^2} r dr d\theta \leq (I_a)^2 \leq \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2} r dr d\theta$$

buradan,

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}) \leq (I_a)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2a^2})$$

$\lim_{a \rightarrow \infty}$ için istene sonuç elde edilir:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

39.11 Alıştırmalar

1. $D = \{(x, y) \mid \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ ise

$$\iint_D \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

2. $z = x^2 + y^2$ parabolünün altında, xy - düzleminin üstünde ve $x^2 + y^2 = 2x$ silindirin içinde kalan katı cismin hacmini bulunuz.

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresi ile üstten ve $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi ile alttan sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

4. D bölgesi $x = \sqrt{4 - y^2}$ yarı çemberi ve y -ekseni ile sınırlı bölge ise,

$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} \, dA$$

integralini hesaplayınız.

5. D bölgesi $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 2x$, çemberleri ile sınırlı bölge ise,

$$\iint_D x \, dA$$

integralini hesaplayınız.

- 6.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

- 7.

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

- 8.

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} (x^2 \cdot y^2) \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

- 9.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

integralini hesaplayınız.

10. Aşağıdaki ntegralleri tek bir integral işareti atında yazınız.

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy \, dy \, dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \, dx$$

integralini hesaplayınız.

11. $r = 2 - \sin \theta$ kalp eğrisinin alanını bulunuz.

12. $z = 8 - x^2 - y^2$ ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

13. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$ ise

$$\iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} \, dA$$

integralini hesaplayınız.

14. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ ise

$$\iint_D e^{x^2 + y^2} \, dA$$

integralini hesaplayınız.

15. $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ ise

$$\iint_D e^{-\sqrt{x^2 + y^2}} \, dA$$

integralini hesaplayınız.

16. $r = 2 \sin \theta$ eğrisini çiziniz.

17. $r = 1 - \cos \theta$ eğrisini çiziniz.

18. $r = \theta$ eğrisini çiziniz.

19. $r = |\theta|$ eğrisini çiziniz.

20. $r = 2 \cos 4\theta$ eğrisinin birinci bölgede sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

21.

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{-x^2 - y^2} \, dy \, dx$$

integralini hesaplayınız.

22. $z = 4(x^2 + y^2)$ paraboloidi, $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ silindiri ve xy düzlemi tarafından sınırlanan hacmi bulunuz.

23. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ küresi içinde ve $x^2 + y^2 = 9$ silindiri dışında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

24. Kutupsal koordinatları kullanarak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} \, d\theta = 1$$

olduğunu gösteriniz.

25.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx$$

integralini hesaplayınız.

olduğunu gösteriniz.

26.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

integralini hesaplayınız.

27. $r = 2\sqrt{2 - \sin 2\theta}$ eğrisinin birinci bölgede sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.
28. $r = 1 + \cos \theta$ kalp eğrisi içinde ve $r = 1$ çemberi dışında kalan düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.
29. $r = \frac{4\theta}{3}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ spirali ile x ekseninin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.
30. $r = 1 + \cos \theta$ ile $r = 1 - \cos \theta$ kalp eğrileri arasındaki alanı bulunuz.

31.

$$f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$$

fonksiyonunun $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$ bölgesi üzerindeki integralini bulunuz.

32.

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

fonksiyonunun $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ile $x^2 + y^2 = e^2$ çemberinin sınırladığı bölge üzerindeki integralini bulunuz.

33. $r^2 = 9 \sin 2\theta$ eğrisinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.34. $y = x^2$, $y = -1$, $y = 2x - 1$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bulunuz.35. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ eğrisine Nernoulli lemniskatı denilir. Bu eğrinin $P(1, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini yazınız.36. $(y - a)^2(x^2 + y^2) = b^2 y^2$ eğrisine Nicomede konkoidi denilir. Bu eğrinin $P(\sqrt{15}, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.

37. Kapalı türev formülünü kullanarak, çemberin her teğetin, çember merkezini değme noktasına birleştiren yarıçapa dik olduğunu gösteriniz.

38. Kutupsal koordinatları kullanarak,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\cos \theta + \sin \theta)^2} = 1$$

olduğunu gösteriniz.

39.

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy$$

integralini hesaplayınız.

40. Pozitif Ox -ekseni ve $r = \frac{4\theta}{3}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ spirali tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

40 Üç Katlı İntegraller

Üç katlı ya da n-katlı integral tanımı iki katlı integralin genellemesidir. Bu bölümde üç katlı integralleri ele alacağız. İki katlı integralde integral bölgesi olarak düzlemde bir D bölgesini alıyorduk. Üç katlı integralde, integral bölgesi düzlemsel olmak yerine üç boyutlu uzayda bir T hacmi olacaktır. $w = f(x, y, z)$ fonksiyonunun tanım bölgesi

$$T = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f, x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

kümesidir. Bazı yerlerde \leq yerine $<$ bağıntısı gelebilir. Tabii bu küme bir dikdörtgenler prizmasıdır. Ama bu özel bir durumdur; T her zaman uzayda bilinen bir geometrik şekle benzemeyebilir. T kümesi üç boyutlu uzayda bir yer (hacim) doldurur. Bu hacme *katı cisim* (solid) denilir.

Üç katlı integrali tanımlamak için, ilk işimiz T tanım kümesinin bir bölüntüsünü oluşturmak olacaktır. Tek katlı integralde bir doğru parçasının, iki katlı integralde bir dikdörtgenin bölüntüsünü oluşturmuş-tuk. Üç katlı integralde ise bir dikdörtgenler prizmasının bölüntüsünü oluşturacağız. Bu iş, önceki yaptıklarımızın benzeri olacaktır:

$[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü n tane alt aralıktan oluşan

$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$[c, d]$ aralığının bir bölüntüsü m tane alt aralıktan oluşan

$$\mathcal{Q} : c = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{m-1} < y_m = d \quad m \in \mathbb{N}^+$$

$[e, f]$ aralığının bir bölüntüsü s tane alt aralıktan oluşan

$$\mathcal{R} : e = z_0 < z_1 < z_2 < z_3 < \dots < z_{s-1} < z_s = f \quad s \in \mathbb{N}^+$$

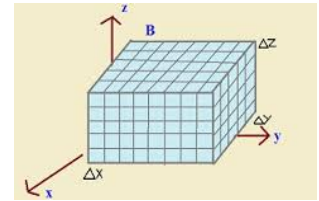
olsun. T hacminin ayrışımını

$$\begin{aligned} T_{ijk} &= \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{R} \\ &= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \\ &1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K, \quad I, J, K \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

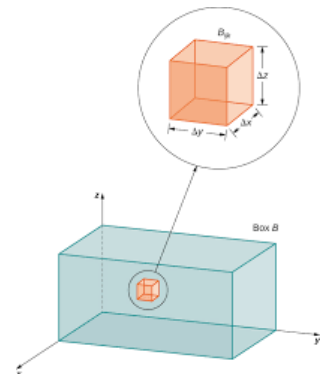
biçiminde ifade edebiliriz. İntegral tanımında bölüntü aralıklarının en uzununun uzunluğu sıfıra giderken limit alındığı için, her üç boyuttaki bölüntü aralıklarını kendi aralarında eşit almak bir kısıtlama getirmez. Sembeleri basitleştirmek için, \mathcal{P} bölüntüsündeki aralıkların uzunluklarının aynı ve Δx , \mathcal{Q} bölüntüsündeki aralıkların uzunluklarının aynı ve Δy , \mathcal{R}

$$\iiint_D f(x, y, z) dV$$

Şekil 40.1: Üç katlı integral



Şekil 40.2: Katı cismin bölüntüsü



Şekil 40.3: Bir bölüntünün hacmi

bölüntüsündeki aralıkların uzuluklarının aynı ve Δz olduğunu varsayalım. Buna göre T prizmasının T_{ijk} küçük prizmalarından oluştuğunu ve onların her birisinin hacminin

$$\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z \quad (40.1)$$

olduğunu söyleyebiliriz. Artık integral tanımı için Riemann toplamını oluşturabiliriz:

$$(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \in T_{ijk}$$

olmak üzere

$$S_{nms} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V \quad (40.2)$$

diyelim.

Tanım 40.1. T bölgesi üç boyutlu \mathbb{R}^3 uzayında bir bölge ve $f(x, y, z)$ fonksiyonu bu bölge üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun.

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \lim_{n, m, s \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^s f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta V \quad (40.3)$$

diyelim. Sağdaki limit varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun T bölgesi üzerindeki üç katlı integrali denilir ve soldaki simge ile gösterilir.

Anımsanacağı gibi, iki katlı integralin tanımında hesaplamanın zorluğunu aşmak için, katlı integrali integral tanımından hesaplamak yerine ardışık integrallerle hesaplama yoluna gitmiştik. Benzer düşüncüyü üç katlı integrallere de uygulayacağız. Üç katlı integrali art arda uygulanan üç tane tek katlı integralin hesaplanmasına indirgeyebiliriz. O durumda, tek katlı integral için bildiğimiz bütün integral alma yöntemlerini uygulayabileceğiz. Bu olgu Katlı integrallerin hepsi için geçerlidir ve integral hesabını çok kolaylaştırır.

Yine anımsayacağınız gibi, düzlemsel bir D bölgesi üzerinden iki katlı integrali ardışık integrallerle dönüştürürken D bölgesinin Ox - ve Oy - eksenleri üzerine izdüşümlerini alıyor ve izdüşümün uç noktalarını en dıştaki integralin sınırları olarak kullanıyorduk. Benzer işi üç boyut için de düşünebiliriz. Ancak, bu kez izdüşümler koordinat eksenleri yerine xy , xz , yz koordinat düzlemleri üzerine yapılacaktır. Bu üçünü ayrı ayrı bir teorem halinde yazalım:

Teorem 40.2.

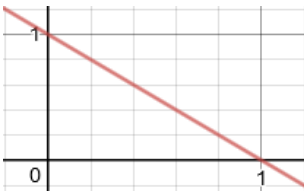
1. T bölgesinin xy - koordinat düzlemine izdüşümü T_{xy} olmak üzere $f(x, y, z)$ fonksiyonu

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in T_{xy}, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{T_{xy}} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA \quad (40.4)$$

eşitliği sağanır.



Şekil 40.4: xy düzlemine izdüşüm

2. T bölgesinin xz - koordinat düzlemine izdüşümü, T_{xz} olmak üzere, $f(x, y, z)$ fonksiyonu

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in T_{xz}, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{T_{xz}} \left(\int_{h_1(x, z)}^{h_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dA \quad (40.5)$$

eşitliği sağlar.

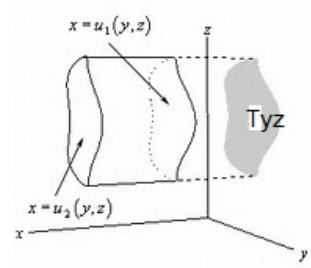
3. T bölgesinin yz - koordinat düzlemine izdüşümü T_{yz} olmak üzere $f(x, y, z)$ fonksiyonu

$$T = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in T_{yz}, k_1(y, z) \leq x \leq k_2(y, z)\}$$

bölgesi üzerinde sürekli ise,

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{T_{yz}} \left(\int_{k_1(y, z)}^{k_2(y, z)} f(x, y, z) dx \right) dA \quad (40.6)$$

eşitliği sağlar.



Şekil 40.6: yz düzlemine izdüşüm

40.1 Hacim

T tanım bölgesinde $f(x, y, z) \equiv 1$ ise, f nin T bölgesi üzerinden üç katlı integrali T katı cisminin hacmine eşittir. Bunu bir teorem olarak ifade edebiliriz:

Teorem 40.3.

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iint_{T_{xy}} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} dz \right) dA \quad (40.7)$$

$$= \iint (g_2 / x, y) - g_1(x, y) dA \quad (40.8)$$

ifadesi iki yüzey arasında kalan katı cismin hacmini verir.

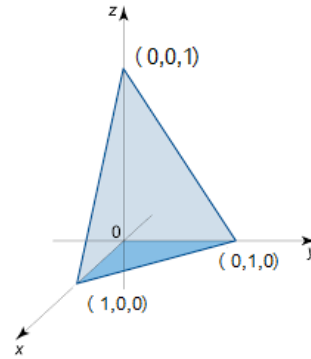
Örnek 40.4. T katı cisim $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ düzlemlerinin sınırladığı düzgün dörtyüzlüdür.

$$\iiint_T z dV \quad (40.9)$$

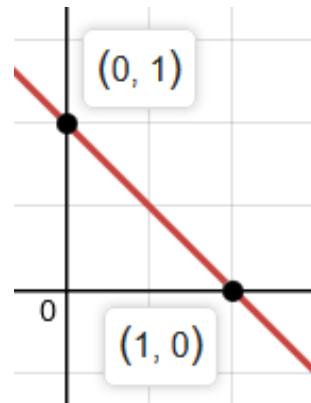
integralini hesaplayınız.

Çözüm: T bölgesinin xy düzlemi üzerine izdüşümü T_{xy} olsun. T bölgesi üstten $z = 1 - x - y$ düzlemi ile ve alttan $z = 0$ düzlemi ile sınırlıdır:

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\} \quad (40.10)$$



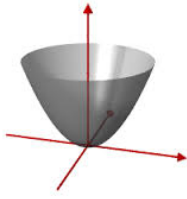
Şekil 40.7: Düzgün dörtyüzlü



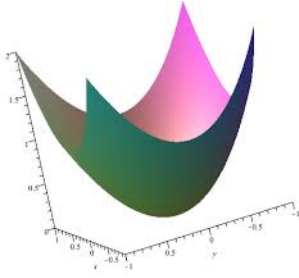
Şekil 40.8: Düzgün dörtyüzlünün xy düzlemi üzerine izdüşümü

dir. O halde,

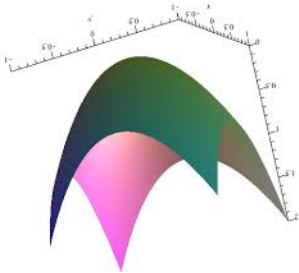
$$\begin{aligned}
 \iiint_T z dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx \\
 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^3}{3} \right]_0^{1-x} dx \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx \\
 &= \frac{1}{6} \left[-\frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$



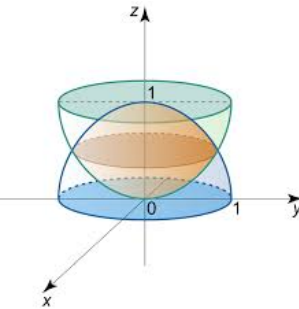
Şekil 40.9: paraboloid



Şekil 40.10: paraboloid



Şekil 40.11: paraboloid



Şekil 40.12: paraboloidler arasındaki hacim

Aynı integrali T nin xz ve yz düzlemleri üzerine izdüşümleri için hesaplayınız.

Örnek 40.5. T katı cisim $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$ paraboloidleri arasında kalan bölgedir.

$$\iiint_T dV \quad (40.11)$$

integralini T nin xy - düzlemi üzerine izdüşümünü alarak hesaplayınız ve xz - düzlemi üzerine izdüşümü (2.Tip) ve xz düzlemi üzerine izdüşümü (3.Tip) üzerinde integral sınırlarını yazınız.

Çözüm: xy -düzlemi üzerindeki izdüşümü T_{xy} : $x^2 + y^2 \leq 4$ diskidir. Çünkü $z = 8 - x^2 - y^2$ denkleminde $z = 0$ konulursa T_{xy} izdüşümü $x^2 + y^2 = 4$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_T dV = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz dy dx \\
 &= 4 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (8 - 2(x^2 + y^2)) dy dx \\
 &= 16\pi
 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca,

$$I = \int_0^4 \int_{y^2}^4 \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx dz dy + \int_{-2}^2 \int_4^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} dx dz dy$$

ya da

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx dz dy + \int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} dx dy dz$$

ve

$$I = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dz dx + \int_{-2}^2 \int_4^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dy dz dx$$

ya da

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dy dx dz + \int_4^8 \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} dy dx dz$$

olur.

40.2 Alıştırmalar

1.

$$D = \{z + x^2 = 4, y + z = 4, y = 0, z = 0\}$$

yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

2.

$$D = \{y^2 + z^2 = 1, x = 0, x + y + z = 2\}$$

yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

3.

$$S = \{z = x^2 + y^2, z = 0, x^2 + y^2 = 4\}$$

yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

4.

$$D = \{x^2 + z^2 = 4, x^2 + z^2 = 4\}$$

yüzeyleri ile sınırlı bölgenin hacmini bulunuz.

40.3 Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

Tek ve iki katlı inegrallerde yaptığımız gibi, üç katlı integral alırken de hesaplamayı kolaylaştıracak değişken değişimini yapabiliriz. Bunu sağlayan teorem şudur:

Teorem 40.6. 1. $\phi = f(x, y, z)$ fonksiyonu üç boyutlu uzaydaki bir S bölgesinde sürekli, bire bir ve örten τ dönüşümü,

$$\tau : \begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = k(u, v, w) \end{cases}$$

S bölgesini S^* bölgesine dönüştürsün.

2. g, h, k fonksiyonları S^* üzerinde sürekli türevlenebilir olsunlar.

3. τ dönüşümünün jacobian'ı

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

olmak üzere $J(u, v, w) \neq 0$ ise

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iiint_{S^*} f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw$$

olur.

Kanıt: İki katlı integrallerde yaptığımıza benzer olarak yapılabilir.

Örnek 40.7. $S = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$ olmak üzere,

$$\tau : \begin{cases} u = x \\ v = xy \\ w = 3z \end{cases}$$

dönüşümü altında

$$\iiint_S (x^2 y + 3xyz) dx dy dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: $u = x, v = xy, w = 3z \Rightarrow x = u, y = \frac{v}{u}, z = \frac{w}{3}$ yazılabilir. Buradan,

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2 y + 3xyz) dx dy dz &= \iiint_{S^*} \left(u^2 \left(\frac{v}{u} \right) + 3u \left(\frac{v}{u} \right) \left(\frac{w}{3} \right) \right) |J(u, v, w)| du dv dw \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^2 \int_1^2 \left(v + \frac{vw}{u} \right) du dv dw \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^2 \left(v + vw \ln 2 \right) \Big|_1^2 dv dw \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \left(1 + w \ln 2 \right) \frac{v^2}{2} \Big|_0^2 dw \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 (1 + w \ln 2) dw \\ &= \frac{2}{3} \left(w + \frac{w^2}{2} \ln 2 \right) \Big|_0^3 \\ &= \frac{2}{3} \left(3 + \frac{9}{2} \ln 2 \right) \\ &= 2 + \ln 8 \end{aligned}$$

bulunur.

40.4 Alıştırmalar

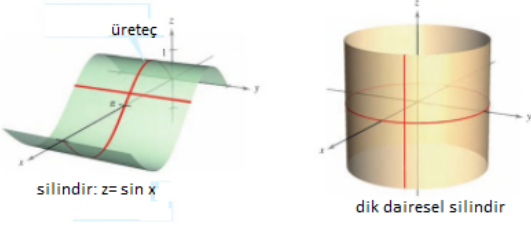
- $x = uv, y = vw, z = uv$ dönüşümünün Jacobiyanını bulunuz.
- $x = e^{u-v}, y = e^{u+v}, z = e^{u+v+w}$ dönüşümünün Jacobiyanını bulunuz.
- $S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$ elipsoidinin sınırladığı bölgenin hacmini $x = 2u, y = 3v, z = 5w$ dönüşümünü kullanarak hesaplayınız.

40.5 Silindrsel Koordinatlar

40.5.1 Silindir Nedir?

Tanım 40.8. Düzlemsel bir C eğrisi ile uzayda bir d doğrusu verilsin. C eğrisini kesen ve d doğrusuna paralel olan bütün doğruların oluşturduğu kümeye silindir denilir. C eğrisine silindirin üretici (generating curve) ve d eğrisine de silindirin doğrultmanı (directrix) denilir.

Buna göre silindir uzayda özel bir yüzey türüdür. Eğer üretici bir çember ise boru şeklinde bir silindir oluşur. Eğer doğrultman çember düzlemine dik ise, dik dairesel silindir oluşur.



Şekil 40.13: Silindirler

Üç boyutlu koordinat sistemlerinin hepsi üç boyutlu Kartezyen koordinat sisteminin işlevini bazı özel durumlar için daha kolay ifade etmeye yararlar. Dolayısıyla, hepsi Kartezyen sistemin (x, y, z) koordinatlarını kendi işlevlerine uygun biçimde ifade ederler.

Bunlardan birisi silindirik koordinat sistemidir. Dairesel silindir yüzeyi üzerindeki noktaları kolay belirlemeye yarar. Silindirin yarıçapı değiştirilerek uzaydaki her noktanın konumunu belirlenebilir.

Üç boyutlu uzayda bir (x, y, z) noktasının dikey Kartezyen koordinat sisteminden silindirik koordinatlara dönüşümü,

$$\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

denklemleri ile verilir.

Silindrisel koordinatlar kullanılarak üç katlı integraller kolayca hesaplanabilir.

Örnek 40.9. $x^2 + y^2 = a^2$ denklemini silindrisel koordinatlara dönüştürünüz.

Çözüm:

Dikey Kartezyen koordinat sisteminde silindrisel koordinat sistemine dönüşüm formülleri kullanılırsa,

$$r^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow r = a$$

çıkar.

Örnek 40.10. $x^2 + y^2 = a \cdot z$ paraboloidini silindrisel koordinatlara dönüştürünüz.

Çözüm:

Dikey Kartezyen koordinat sisteminde silindrisel koordinat sistemine dönüşüm formülleri kullanılırsa,

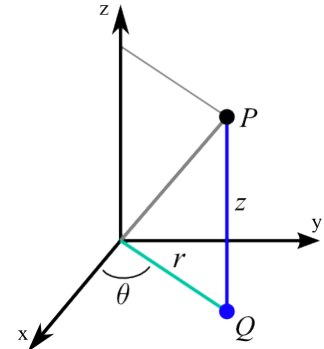
$$r^2 = az$$

çıkar.

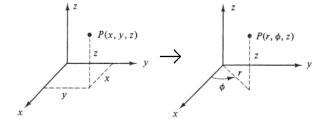
Silindrisel koordinatlardaki üç katlı integrali ardışık integrallere dönüştürmek için şu teoremi kullanınız:

Teorem 40.11. T cismi üstten $z = v(r, \theta)$ ve alttan $z = u(r, \theta)$ yüzeyleri ile sınırlı olsun.

1. T nin xy - düzlemi üzerine D izdüşümü kutupsal koordinatlarda verilsin.



Şekil 40.14: Silindrisel koordinatlar



Şekil 40.15: Kartezyenden silindirsel dönüşüm

2. $f(r, \theta, z)$ fonksiyonu S üzerinde sürekli olsun.

3.

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

ise,

$$\iiint_S f(r, \theta, z) dV = \iint_D \int_{u(r, \theta)}^{v(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta \quad (40.12)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: Öncekiler gibi yapılabilir.

Özel olarak,

$$D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

ise,

$$\iiint_S f(r, \theta, z) dV = \iint_D \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u(r, \theta)}^{v(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta \quad (40.13)$$

olur.

Örnek 40.12. S bölgesi birinci sekizde birlik (first octant) bölgede $x^2 + y^2 = 1$ ve $x^2 + y^2 = 4$ silindirleri ile $z = 0, z = 1, x = 0, x = y$ düzlemleri tarafından sınırlı bölge ise,

$$\iiint_S (x^2 + y^2) dV \quad (40.14)$$

integralini hesaplayınız.

S bölgesi silindirik koordinatlarda

$$\{(r, \theta, z) : 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 1\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \iiint_S (x^2 + y^2) dV &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 1^2 r^2 \cdot r dr d\theta dz \\ &= \frac{15}{16} \pi \end{aligned}$$

olur.

Örnek 40.13.

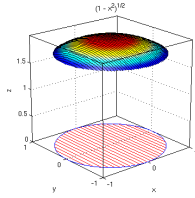
$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx$$

integralini silindirik koordinatları kullanarak hesaplayınız.

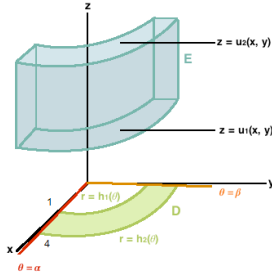
Çözüm: İntegral bölgesi

$$S = \{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

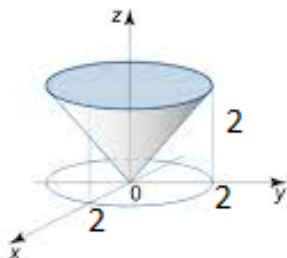
olduğundan



Şekil 40.16: xy düzlemine izdüşüm



Şekil 40.17: İzdüşüm



Şekil 40.18: İzdüşüm

$$\begin{aligned}
\iiint_S (x^2 + y^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 z \Big|_r^2 dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 (2 - r) dr d\theta \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{2} r^4 - \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^2 \right) \\
&= \frac{16}{5} \pi
\end{aligned}$$

Örnek 40.14. $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ ise

$$\iiint_S z e^{-x^2-y^2} dV \quad (40.15)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Silindirik koordinatlar kullanılır ve ardışık integraller uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\iiint_S z e^{-x^2-y^2} dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z e^{-r^2} r dr d\theta dz \\
&= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)
\end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 40.15. S cisimi $8 - r^2$ ve $z = r^2$ paraboloidleri ile sınırlı bölge ise S cisminin hacmini bulunuz.

Çözüm: Hacim formülü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^{8-r^2} r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - r^2 - r^2) r dr d\theta \\
&= 16\pi
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 40.16. Kartezyen koordinat sistemindeki

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dx dy$$

ardışık integrali küresel koordinat sistemine dönüştürerek çözünüz.

Çözüm:

Küresel koordinatlara dönüşüm yapılsa,

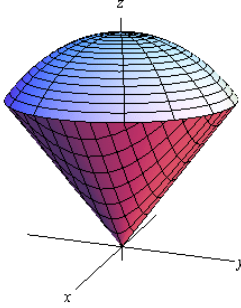


Şekil 40.19: Paraboloidler arasında kalan hacim



Şekil 40.20: Paraboloidler arasında kalan hacim

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \rho \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \\
&= \pi
\end{aligned}$$



Şekil 40.21: Paraboloidler arasında kalan hacim

çıkar. Görüldüğü gibi, küresel koordinatlara dönüşüm işlemleri çok basitleştirmektedir.

Örnek 40.17. a yarıçaplı kürenin içinden $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin ayırdığı parçanın hacmini bulunuz.

Çözüm:

Çözüm: Küresel koordinat sistemi kullanılırsa,

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{4\cos\varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = 8\pi$$

çıkar.

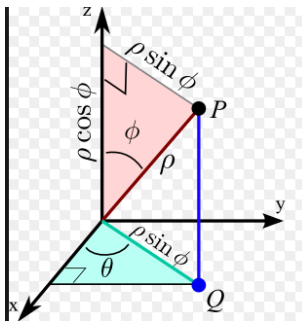
40.6 Alıştırmalar

1. Dikey kartezyen koordinatlarda verilen aşağıdaki noktaları silindirik koordinatlara dönüştürünüz:

$$\begin{array}{lll}
a) (1, -1, 4) & b) (2\sqrt{3}, 2, 17) & c) \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2}\right) \\
d) (-4, -4, 0) & e) (3\sqrt{2}, -3, 3) & f) (3, -\sqrt{7}, \sqrt{7})
\end{array}$$

2. Dikey kartezyen koordinatlarda verilen aşağıdaki denklemleri silindirik koordinatlara dönüştürünüz:

$$\begin{array}{lll}
a) x^2 + y^2 + z^2 = 4 & b) x + y - z = 1 & c) x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\
d) x^2 + z^2 = 16 & e) x^2 + y^2 + z^2 = 4z & f) -x^2 - y^2 + z^2 = 1
\end{array}$$



Şekil 40.22: Küresel koordinatlar

40.7 Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar

Üç boyutlu koordinat sistemlerinin hepsinin üç boyutlu kartezyen koordinat sisteminin işlevini bazı özel durumlar için daha kolay ifade etmeye yaradığını söylemiştik. Bu kitapta inceleyeceğimiz ikinci koordinat sistemi küresel koordinat sistemidir.

Küresel koordinat sistemi adından da anlaşıldığı gibi, bir küre yüzeyi üzerindeki noktaların konumunu belli etmek için kullanılan koordinat sistemidir. Tabii, kürenin yarıçapını değiştirerek üç boyutlu uzaydaki her noktanın konumunu küresel koordinat sistemi ile belirlemek mümkündür.

Küresel koordinat sisteminde üç nicelik vardır (yandaki şekle bakınız):

1. Uzaydaki P noktasının başlangıç noktasına $|OP|$ uzaklığı. Çoğunlukla, $\rho = |OP|$ ya da $r = |OP|$ ile gösterilir.

2. $|OP|$ nin xy -düzlemi üzerine $|OQ|$ izdüşümü ile Ox -ekseni arasındaki θ açısı. Bu açı silindirik koordinatlardaki işleve sahiptir ve üzerinde bir kısıt yoktur.

3. $|OP|$ ile Oz -ekseninin pozitif kısmı arasındaki φ açısı.

Üç boyutlu uzayda bir $P(x, y, z)$ noktasının dikey kartezyen koordinat sisteminden küresel koordinatlardaki (ρ, ϕ, θ) noktasına dönüştüren η dönüşümü,

$$\eta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

denklemleri ile verilir. Burada P noktasının başlangıç noktasına uzaklığı ρ , P noktasının xy -düzlemine izdüşümü olan Q noktasının başlangıç noktasına uzaklığı $r = \rho \sin \phi$, OQ nun Ox -ekseniyle pozitif yöne yaptığı açı θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), OP nin Oz -ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı ϕ , ($0 \leq \phi \leq \pi$) dir. θ için kısıt olmadığını söylemiştik. Ama ϕ için ($0 \leq \phi \leq \pi$) kısıtlamasının olduğunu unutmayınız.

Örnek 40.18. Dikey kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

olan küreyi küresel koordinat sisteminde gösteriniz.

Çözüm: Yukarıdaki η dönüşümünü uygularsak,

$$\begin{aligned} 1 &= \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + (\rho \cos \phi - 1)^2 \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \phi - 2\rho \cos \phi + 1 \\ &\Rightarrow \rho^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &\Rightarrow 2\rho \cos \phi \\ &\Rightarrow \rho^2 = 2\rho \cos \phi \\ &\Rightarrow \rho = 2 \cos \phi \end{aligned}$$

çıkar.

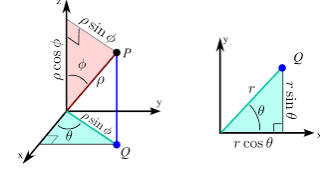
Örnek 40.19. Dikey kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

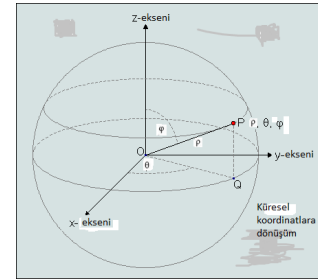
olan koniyi küresel koordinat sisteminde gösteriniz.

Çözüm: Yukarıdaki η dönüşümünü uygularsak,

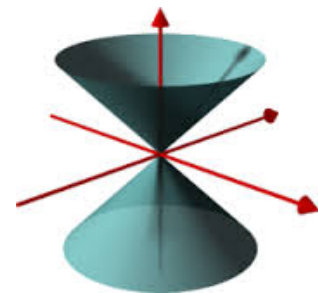
$$\begin{aligned} \rho \cos \phi &= \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi} \quad (\rho \geq 0, \sin \phi \geq 0) \\ \rho \cos \phi &= \rho \sin \phi \\ \cos \phi &= \sin \phi \\ \phi &= \frac{\pi}{4} \quad (0 \leq \phi \leq \pi) \end{aligned}$$



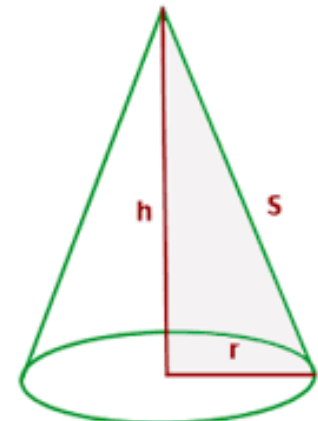
Şekil 40.23: Küresel koordinatlar



Şekil 40.24: Küresel koordinatlara dönüşüm



Şekil 40.25: Dik dairesel koni



Şekil 40.26: Dik dairesel koninin boyutları

çıkar.

Dikey kartezyen koordinat sistemindeki üç katlı integrali küresel koordinat sisteminde üç katlı integrale dönüştürmek için aşağıdaki teoremi kullanınız:

Teorem 40.20. :

1. Küresel koordinatlarda gösterilen S sınırlı cisim üzerinde $\xi = f(\rho, \phi, \theta)$ fonksiyonu sürekli,
2. η dönüşümü geçerli,
3. η dönüşümünün Jacobiyani,

$$\rho^2 \sin \phi = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\phi & x_\theta \\ y_\rho & y_\phi & y_\theta \\ z_\rho & z_\phi & z_\theta \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & -\rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix}$$

ise

$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iiint_{S^*} f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad (40.16)$$

eşitliği sağlanır.

Burada S^* , S katı cisminin küresel koordinatlardaki temsilidir. $\rho^2 \sin \phi$ değeri T dönüşümünün jacobian matrisinin determinantının mutlak değeridir:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & \rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$$

Kanıt: Teorem (40.6)'dan çıkar.

Örnek 40.21. Üstten $\rho \leq 1$ küresi ve alttan $\phi = \frac{\pi}{3}$ konisi ile sınırlı S bölgesinin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \iiint_S \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{3} \rho^3 \sin \phi d\phi d\theta \\ = \frac{1}{6} 2\pi \\ = \frac{\pi}{3} \text{ birim}^3$$

Örnek 40.22. $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ ise,

$$\iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dV \quad (40.17)$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

S cismi küre olduğundan küresel koordinatları kullanmak kolaylık sağlar. Üç katlı integrali ardışık integrallere dönüştürürsek,

$$\begin{aligned}
 \iiint_S e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} dV &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{(\rho^2)^3} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
 &= (-\cos \phi)|_0^{\pi} \cdot 2\pi \left(\frac{1}{3} e^{\rho^3} \right)_0^1 \\
 &= \frac{4}{3} \pi (e - 1)
 \end{aligned}$$

Örnek 40.23.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} 3r \, dz \, dr \, d\theta \quad (40.18)$$

integralini

1. Dikey katezyen koordinat sisteminde $dz \, dx \, dy$ sırasına göre ardışık integrale dönüştürünüz.
2. Küresel koordinat sisteminde $d\rho \, d\phi \, d\theta$ sırasına göre ardışık integrale dönüştürünüz
3. Silindirik koordinat sistemine dönüştürerek hesaplayınız.

Çözüm:

1.

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} \int_{(x^2+y^2)}^{(4-x^2-y^2)} 3 \, dz \, dx \, dy$$

2.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 3\rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

3.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} 3r \, dz \, dr \, d\theta &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (r(4-r^2)^{1/2} - r^2) \, dr \, d\theta \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \sqrt{(4-r^2)^3} - \frac{r^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} (8 - 4\sqrt{2}) \, d\theta \\
 &= (8 - 4\sqrt{2})2\pi
 \end{aligned}$$

Örnek 40.24. $\rho = 1 - \cos \phi$ elma yüzeyinin sınırladığı hacmi bulunuz.

Çözüm: Küresel koordinat sistemini kullanalım:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (1 - \cos \phi)^3 \sin \phi \, d\phi \\
 &= 8\pi
 \end{aligned}$$

çıkar.

40.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki interallerin integral bölgelerini çizin ve interali hesaplayınız.

1. (a)

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r dz dr d\theta$$

(b)

$$\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

2. S bölgesi $z = 0$ düzleminin üstünde, $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ konisinin altında ve yandan $x^2 + y^2 = 1$ sindirisi ile sınırlı ise

$$\iiint_S x^2 dV$$

integralini bulunuz.

3.

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2) dz dy dx$$

integralini silindiresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

4.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xy dV$$

integralini silindiresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

5.

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

integralini küresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

6.

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz dx dy$$

integralini küresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

7. Birinci bölgede $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresi ile sınırlı S bölgesi üzerinde

$$\iiint_S e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dV$$

integralini hesaplayınız.

8. $z = 2$, $z = 4$ düzlemleri ile $|x| + |y| = 1$ silindirin sınırladığı hacmi bulunuz.

9.

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z dz dx dy$$

integralini küresel koordinatları kullanarak hesaplayınız.

Index

dA , 641

$dx dy$, 641

üç katlı integral, 673

bölünürü, 641

hacim, 673

iki katlı integral, 641

Jacobian, 684

katı cisim, 673

katlı integral, 641

Riemann toplamı, 641

silindir, 678

triple integral, 673