TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ, ORHAN ÖZER, SERKAN ALI DÜZCE

KALKULUS

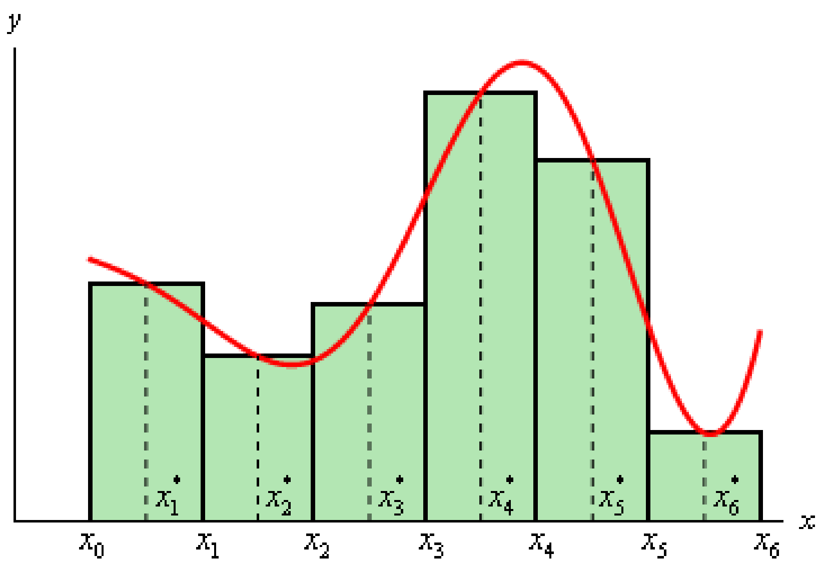
NOBEL

Contents

1 İntegral

Sembolik anlamıya integral, türevi verilen fonksiyonu bulma eylemidir. Ama çıkış ortaya çıkış nedeni, düzlemsel alanların hesaplanması içindir. Tabii, düzlemsel alanlardan sonra yüzey alanlarının hesabına ve fiziksel uygulamalara genişlemiştir. Önce düzlemsel alan kavramını ele alacağız.

2 Belirli İntegral



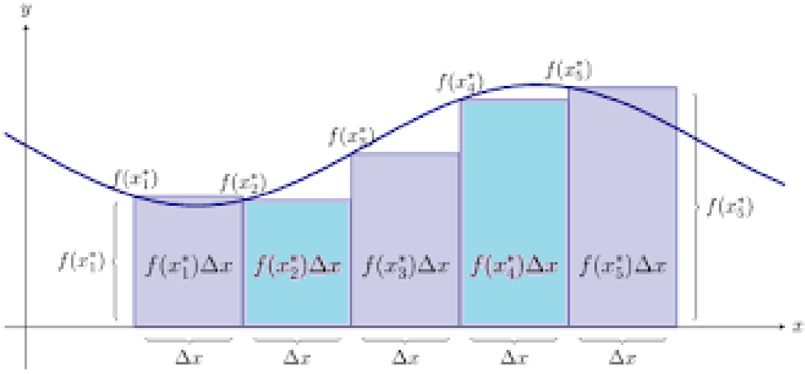
Şekil 2.1: Düzlemsel bölgenin alanı

2.1 Belirli İntegral

Düzlemde kare, dikdörtgen, üçgen, çember gibi iyi bilinen geometrik şekillerin alanlarını bulmak için uygun formüller kullanıyoruz. Ama, uygulamada alanını bilmek isteyeceğimiz düzlemsel alanlar, yukarıda sayılan şekillerden hiç birisine benzemeyebilir. Üstelik bunların sayısı bilinen geometrik şekillerden daha çoktur.

Bilimin her alnında olduğu gibi, matematik de kuralları genişletme ve mümkünse genelleştirme peşindedir. Belirli integral bu gereksemeden doğmuştur. İlk genelleşme, bilinen geometrik şekiller yerine, bilinen fonksiyonlarla sınırlanmış düzlemsel bölgelerin alanlarının hesaplanması işidir. Daha sonra çok boyutlu uzaylarda yüzey alanlarını bulmaya genişletilmiştir. Ayrıca, fizikte farklı amaçlarla kullanılmaya başlanmıştır.

Şimdi bir $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunu düşünelim. Ox- ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alanı hesaplamak isteyelim. Genişleme için daima iyi bildiğimiz kavramlara dayanırız. Dikdörtgenin alanını iyi bildiğimize göre, söz konusu dülemsel alanı dikdörtgenlere ayırmaya çalışalım. Tabii, y=f(x) fonksiyonu Ox-eksenine paralel bir doğru değilse, dikdörtgenlerin alanlarının toplamı ancak gerçek alanın yaklqaşık bir değeri olur. Şimdi bunu geometrik olrak açıklayalım:



Şekil 2.2: Eğri altındaki alanın yaklaşık değeri

Önce, f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığı üzerinde pozitif değerler aldığını varsayalım. $[a,b]$ aralığını, eşit olması gerekmeyen alt aralıklara bölelim:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \tag{2.1}$$

Her $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında bir $x*_i$ noktası seçelim. $f(x*_i) = y_i$ diyelim. Ox-ekseni $x = a$ doğrusu, $x = b$ doğrusu ve $y = f(x)$ fonksiyonunun sınırladığı düzlemsel alan, yaklaşık olarak tabanı $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve yüksekliği $y_i = f(x*_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olan dikdörgenlerin alanları toplamına eşittir. Bunu şöyle ifade edelim:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i = y_1 \Delta x_1 + y_2 \Delta x_2 + \ldots + y_n \Delta x_n \tag{2.2}$$

Şekil 2.3: G.F.BernhardRiemann

2.1.1 Riemann Toplamı

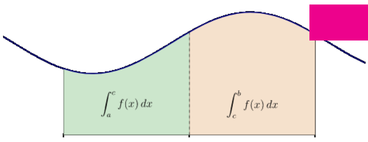
(2.1) ifadesine $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü (partition), (2.2) toplamına da bu parçalanışa ait Riemann toplamı denilir. Ayrıntıya girmeden, f nin belirli koşulları sağlaması durumunda, en büyük Δx_i uzunluğu sıfıra yaklaşırken (2.2) toplamının varlığını (serinin limitinin varlığını) kabul edeceğiz. Bu kabul gerçel sayıların tamlığına dayanır.

Şekil 2.4: Gottfried Wilhelm Leibniz

$$\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} s_n = \lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x_i \tag{2.3}$$

Tabii, $\lim_{max\{\Delta x_i\} \to 0}$ olduğunda alt aralıkların sayısı sonsuz olur ve her bir alt aralığın uzunluğu sıfıra yaklaşır. Dolayısıyla, (2.3) toplamı bir sonsuz serinin toplamına dönüşür.

(2.2) serisi G.F.Bertrand Riemann (1826-1866) tarafından verilmiştir. $\int$ simgesi ilk kez Gottfried Wilhelm Leibniz (1646- 1716) kullanılmıştır.



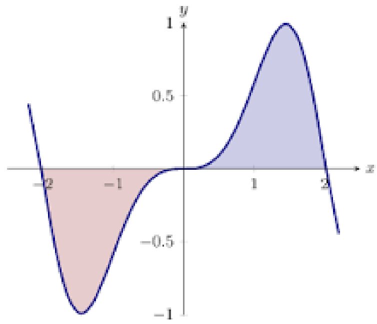
Şekil 2.5: Belirli integralde aralığın bnölünmesi

2.2 Belirli İntegral Kuralları

Teorem 2.1.

$f(x)$ ile $g(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon, $k \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ise, aşağıdaki bağıntılar vardır:

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k$ sabit sayı)
3. $\int_a^b kf(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (c \in [a,b])$
4. $\int_a^b kdx = k(b-a)$
5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$
6. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
7. $x \in [a,b]$ ve m, M sabit sayılr olmak üzere $m \le f(x) \le M$ ise
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
8. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a < b)$
9. $x \in [a,b]$ için $f(x) \ge 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \ge 0$
10. $x \in [a,b]$ için $g(x) \ge f(x)$ ise $\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$



Şekil 2.6: Düzlemsel Alan

2.2.1 Kanıtlar

Listede yazılı olan kuralları sırasıyla kanıtlayalım.

Kanıt 1: $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
f ve g fonksiyonları integrallenebilen iki fonksiyon ise $h = f \pm g$ nin de integrallenebilir olduğunu göstereceğiz. Bir P_n bölüntüsü için için Riemann toplamını yazarsak, $p_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ olmak üzere,

$$S(h, P_n) = \sum_{i01}^{n} h(p_i)\Delta x_i$$
$$S(f, P_n) = \sum_{i01}^{n} f(p_i)\Delta x_i$$
$$S(g, P_n) = \sum_{i01}^{n} g(p_i)\Delta x_i$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} S(h, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} h(p_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(f(p_i) \pm g(p_i)\big)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(p_i)\Delta x_i \end{aligned}$$

çıkar. Limit alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx &= \lim_{n\to\infty} \big(S(f, P_n) \pm S(g, P_n)\big) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx \end{aligned}$$

bulunur. □

Kanıt 2: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, ($k$ sabit sayı)

Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. Her $i = 1,2,\ldots,n$ için $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_a^b kf(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i^*)\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \\
&= k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i) \\
&= k\int_a^b f(x)dx
\end{aligned}$$

Kanıt 3: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (c \in (a,b)$

$[a,c]$ arlığının bir bölüntüsü Q, $[c,b]$ aralığının bir bölüntüsü R olsun. Bu iki bölüntünün bileşimini $P = Q \cup R$ ile gösterelim. $[a,b]$ aralığının bir bölüntüsü P olacaktır. Riemann toplamları için

$$S(f,P) = S(f,Q) + S(f.R)$$

yazabiliriz. $(||Q|| \to 0) \wedge (||R|| \to 0) \Longleftrightarrow (||P|| \to 0)$ olduğundan

$$\lim_{||P||\to 0} S(f,P) = \lim_{||Q||\to 0} S(f,Q) + \lim_{||R||\to 0} S(f,R)$$

olur ki bu isteneni verir. □

Kanıt 4: $\int_a^b kdx = k(b-a)$

Bu kural Calculus'un Temel teoreminin bir sonucudur. Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ olur. Her $x \in [a]$ için $f(x) = k$ olsun.

$$\begin{aligned}
\int_a^b k\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\,\delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} k\,\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n.k\,\frac{b-a}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} k\,(b-a)
\end{aligned}$$

Kanıt 5: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

Riemann integral tanımında $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ olur.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

dir. $-\Delta x = -\frac{(a-b)}{n} = \frac{-(b-a)}{n}$ dir. Her $i = 1,2,\ldots,n$ için $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\Delta x) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{(b-a)}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{-(a-b)}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left[-\left(\frac{(a-b)}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\left(\frac{(a-b)}{n}\right)\right] \\
&= -\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(-\Delta x) \\
&= -\int_b^a f(x)dx
\end{aligned}$$

□

Kanıt 6: $int_a^a f(x)dx = 0$

Riemann integral tanımında $[a,a]$ aralığını n eşit parçaya bölen bir P_n bölüntüsü alalım. $\Delta x_i = \Delta x = \frac{(a-a)}{n} = 0$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int_a^a f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(\Delta x) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(0) \\
&= \lim_{n\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Kanıt7 : $x \in [a,b]$ ve m, M sabit sayılar olmak üzere $m \le f(x) \le M$ ise

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\begin{aligned}
m\int_a^b dx &= m(b-a) \qquad ((4)'den) \\
M\int_a^b dx &= M(b-a) \qquad ((4)'den)
\end{aligned}$$

□

Kanıt 8: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, \quad (a < b)$

$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ dir. f süreki lduğundan $|f|$ de sürekidir. Önceki kural uygulanırsa,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

çıkar.

Kanıt 9: $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

f ntegrallenebilir ve $f(x) \geq 0$ ise $[a,b]$ aralığının bir P bölüntüsü için, $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olmak üzere Riemann toplamı $S(f,P) = \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i$ ve

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{||p||\to 0} S(f,P) \geq 0$$

çıkar.

Kanıt 10: $x \in [a,b]$ için $g(x) \leq f(x)$ ise $\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integralenebilir ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \leq f(x)$ ise

$$\int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx$$

olduğunu österelim. $g(x) \leq f(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$ olur. 9.Kural uygulanırsa,

$$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx$$

elde edilir.

2.3 Kalkulüs'uun Temel Teoremleri

2.3.1 Calculus'un 1.Teoremi

Teorem 2.2. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise;*

$F(x) = \int_a^b f(x)dx, \quad x \in [a,b]$

foksiyonu (a,b) aralığında süreklidir, türetilebilir ve

$F'(x) = f(x) \quad x \in (a,b)$

eşitliği sağlanır.

Kanıt:

$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ ise $F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$= \int_a^{x+h} f(t)\, dt * \int_a^x f(t)\, dt$$
$$= \int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

çıkar.

Durum 1: $h > 0$ olsun.

$[x, x+h]$ aralığında $y = f(t)$ fonksiyonunun min dğeri m ve max değeri M ise Theorem (2.1)-7'den

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)\, dt \leq Mh$$

olur. Buradan
$$m \leq \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leq M$$
çıkar. f sürekli olduğundan cendere teoreminden limit alınırsa,
$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$
elde edilir.

Durum 2: $h<0$ ise benzer kanıt yöntemi uygulanabilir.

Örnek 2.2.1.
$$D_x\left(\int_1^x t^2\,dt\right)$$
integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\int_1^x t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_1^x = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow D_x\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = x^2$$
Farklı bir yöntem olarak, Calculus'un 1.Teoremi kulanılarak,
$$\int_1^x t^2 = x^2$$
elde edilir.

2.3.2 Calculus'un İkinci Temel Teoremi

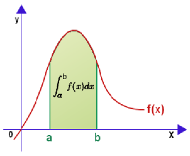
Teorem 2.3. *$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, yukarıdaki gösterimler altında,*
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.4}$$
dır.

Kanıt:

$[a,b]$ nin bir P bölüntüsü,
$$P:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$
ise
$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) \\ &\quad - F(x_{n-2}) + F(x_{n-2}) - \cdots F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \end{aligned}$$
Türevler için ortalama değer teoremi kullanılırsa, her $[x_{i-1}, x_i]$ $\quad (i = 1,2,\ldots n)$ aralığı için
$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_, - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i$$
olacak şekilde bir $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ sayısının varlığı çıkar. Sağ yan sabit ve sol yan Riemann toplamı olduğundan, limit alınırsa,
$$F(b) - F(a) = \lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$
elde edilir.

Örnek 2.3.1.

$y = f(x),\ Ox,\ x = a,\ x = b$ eğrilerinin sınırladığı düzlemsel alan,



Şekil 2.7: Düzlemsel Alanın Belirli İntegral İle Hesaplanması

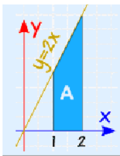
$$\int_a^b f(x)dx \tag{2.5}$$

belirli integraline eşittir.

Örnek 2.3.2.

$y = 2x$ eğrisi, Ox doğrusu, $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularının sınırladığı düzlemsel alanı bulunuz.

$$A = \int_1^2 2x dx \tag{2.6}$$
$$= x^2|_1^2 \tag{2.7}$$
$$= 2^2 - 1 = 3 \tag{2.8}$$

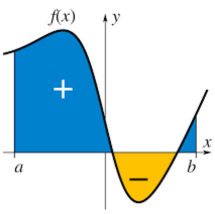


Şekil 2.8: Yamuğun Alanı

$$A = \frac{2+4}{2} \times 1 = 2 \tag{2.9}$$

Aynı sonucu, Şekil 2.8'deki yamuğun alan formülü ile de bulabiliriz. Anımsayacağınız gibi, yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısının yüksekliği ile çarpımına eşittir.

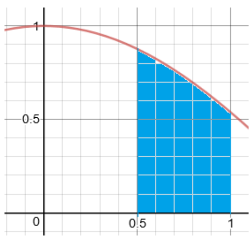
Bazı aralıklarda $y = f(x)$ fonksiyonu negatif değerler alabilir. O zaman (2.2) Riemann toplamındaki negatif y_i ler için gikdörtgen alanları negatif olur. Oysa, düzlemsel alanın değeri daima pozitif olmalıdır.Negatif alan tanımmlı değildir. O nedenle, negatif alanları pozitif yapmalıyız. Bunu yapmak için fonksiyonun negatif değerler aldığı aralıkları saptar ve onlar için bulduğumuz belirli integrali pozitif yaparız. Bu eylemi pratik bir formüle bağlamak da mümkündür:



Şekil 2.9: Negatif Alanlar

$$A = \int_a^b |f(x)| dx \tag{2.10}$$

Örnek 2.3.3.



Şekil 2.10: $\cos x$

$y = \cos x$ eğrisi altında ve $[\frac{1}{2}, 1]$ aralığı üzerinde kalan alanı bulunuz. Verilen bölgede $y = \cos x$ fonksiyonu pozitif değerler aldığı için, istenen alan,

$$A = \int_{0.5}^1 \cos x dx = \sin x|_{0.5}^1 \tag{2.11}$$
$$= \sin(1) - \sin(0.5) \tag{2.12}$$
$$= 0.841 - 0.479 \tag{2.13}$$
$$= 0.362 \tag{2.14}$$

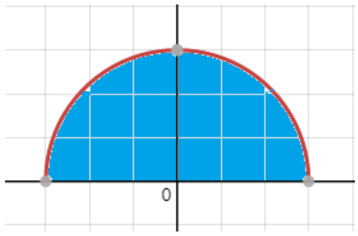
olur.

Örnek 2.3.4.

Yarıçapı $r = 3$ olan dairenin üst yarı düzlemdeki alanını bulunuz.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{2} = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx &= 2\int 3\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t dt, \quad [x = 3\sin t, \quad dx = 3\cos t dt\,] \\
&= \int 3cos^2 t dt \\
&= \frac{3}{2}\int (1+\cos 2t)\; dt \\
&= \frac{3}{2}t + \frac{3}{2}\int \cos 2t\; dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^3 \left(\sin^{-1}(\frac{x}{3}) + \frac{x\sqrt{3^2-x^2}}{3^2}\right)\Bigg|_0^3 \\
&= \frac{\pi}{4}3^2 - 3^2\sin^{-1}(\frac{0}{3}) - 0\sqrt{3^2-0^2} \\
&= \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}$$

olur. Bütün darenin alanı $4.\frac{9\pi}{4} = 9\pi = 3^2\pi$ dir..



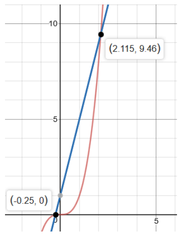
Şekil 2.11: $y = \sqrt{9-x^2}$

Örnek 2.3.5.

$[0,2]$ aralığında $y = x^3$ ile $y = 4x+1$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned}
A = \int_0^2 [(x^3 - (4x+1)]dx &= \frac{x^4}{4} - 2x^2 - x\Big|_0^2 \\
&= -6
\end{aligned}$$

olur.



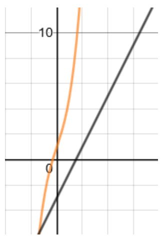
Şekil 2.12: $y = x^3, y = 4x+1$

Örnek 2.3.6.

$[-1,3]$ aralığında $y = x^3 + 3x + 1$ ile $y = 2x-3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned}
A = \int_{-1}^3 [(x^3+3x+1) - (2x-3)]dx &= \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 4x\Big|_{-1}^3 \\
&= 40
\end{aligned}$$

olur.



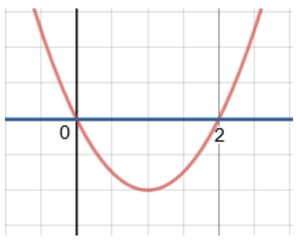
Şekil 2.13: $y = x^3 + 3x + 1, y = 2x-3$

Örnek 2.3.7.

$[0,1]$ aralığında $y = x^2 - 2x$ ile $y = 0$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned}
A = \int_0^1 (x^2 - 2x)dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{1}\Big|_0^1 \\
&= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

olur.



Şekil 2.14: $y = x^2 - 2x, y = 0$

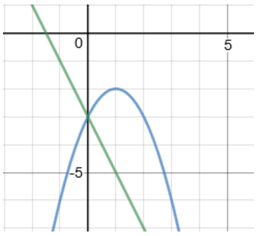
Örnek 2.3.8.

$[-1,5]$ aralığında

$y = 2 + 2x - x^2$ ile $y = -2x - 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{-1}^{5} [(2 + 2x - x^2) - ((-2x - 3)]\,dx = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\Big|_{-1}^{5}$$
$$= 36$$

olur.



Şekil 2.15: $y = -3 + 2x - x^2, y = -2x - 3$

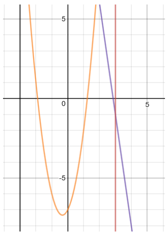
Örnek 2.3.9.

$[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ aralığında

$y = -3 + 2x - x^2$ ile $y = -2x - 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [(2 + 2x - x^2) - ((-2x - 3)]\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{-3x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 8x\Big|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$= 13.044$$

olur.

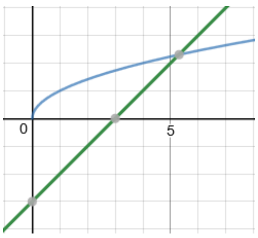

Şekil 2.16: $y = -7 + 2x + 3x^2 - x^3, y = -7x + 20$

Örnek 2.3.10.

$[-3,3]$ aralığında $y = -7 + 2x + 3x^2 - x^3$ ile $y = -7x + 20$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{-3}^{3} [(-7x + 20) - (-7 + 2x + 3x^2 - x^3)]\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9x^2}{2} + 27x\Big|_{-3}^{3}$$
$$= 108$$

olur.

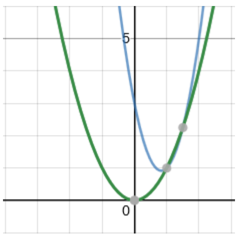


caption$y = 3x^2 - 5x + 3, y = x^2$

Örnek 2.3.11.

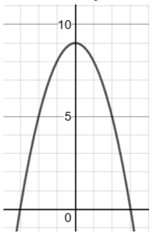
$[1, 3/2]$ aralığında $y = 3x^2 - 5x + 3$ ile $y = x^2$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{1}^{\frac{3}{2}} [(3x^2 - 5x + 3) - (x^2)]\,dx = -\frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 3x\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{1}{24}$$



Şekil 2.17: $3x^2 - 5x + 3, y = x^2$

olur. Alan negatif olamayacağından, integralin mutlak değeri alınırsa sonuç $\frac{1}{24}$ çıkar.



Şekil 2.18: $y = 9 - 3x^2, y = 0$

Örnek 2.3.12.

$[-3,3]$ aralığında $y = 9 - 3x^2$ ile $y = 0$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$A = \int_{1}^{\frac{3}{-3}} (9 - x^2)\,dx = 9x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{3}$$
$$= 36$$

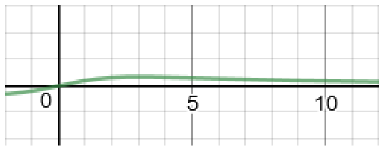
olur. Alan negatif olamayacağından, integralin mutlak değeri alınırsa sonuç $\frac{1}{24}$ çıkar.

Örnek 2.3.13.

$[4,10]$ aralığında $y = \frac{2x}{x^2+9}$ ile $y = 0$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} A = \int_5^{10} \frac{2x}{x^2+9}dx &= \int_{16}^{90} \frac{du}{u}, \qquad [u = x^2+9, \quad du = 2xdx] \\ &= \log u|_{16}^{90} \\ &= \log \frac{90}{16} \\ &= \log 458 \end{aligned}$$

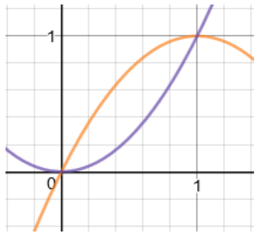
olur.



Şekil 2.19: $\frac{2x}{x^2+9}, y = 0$

Örnek 2.3.14.

$[0,1]$ aralığında $y = 2x - x^2$ ile $y = x^2$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

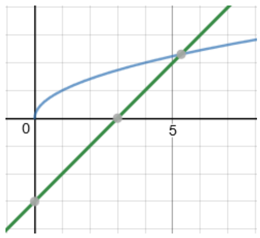


Şekil 2.20: $y = 2x - x^2, y = x^2$

$$\begin{aligned} A = \int_0^1 [(2x - x^2) - x^2]dx = 2\int_0^1 8x - x^2)dx \\ = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 \\ = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.3.15.



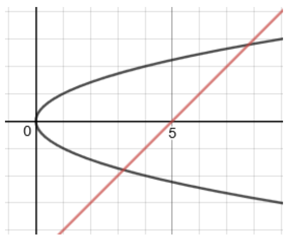
Şekil 2.21: $y = x - 3, y = \sqrt{x}$

$y = x - 3$ ile $y = \sqrt{x}$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.
Çözüm:
Fonksiyonları $x = f(y)$ biçiminde yazmak işlemleri kolaylaştıracaktır:

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^{1} |(y+3) - y^2|dy &= \qquad [x = y+3, \ x = y^2] \\ &= \int_{-1}^{1} (y+3-y^2)dy \\ &= \left(\frac{1}{2}y^2 + 3y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &= \left(\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.3.16.



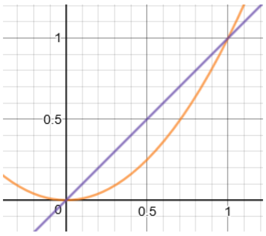
Şekil 2.22: $x = y^2, x = y + 5$

$x = y^2$ ile $x = y + 5$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.
Çözüm:

Fonksiyonları $x = f(y)$ biçiminde yazmak işlemleri kolaylaştıracaktır:

$$
\begin{aligned}
A = \int_1^2 |(y+5) - y^2|\,dy = & \qquad [x = y+5,\ x = y^2] \\
&= \int_1^2 (\frac{y^2}{2} + 5y - (\frac{y^3}{3}) \\
&= \frac{y^2}{2} + 5y - (\frac{y^3}{3}) \\
&= \left(2 - \frac{1}{2}) + (10-5) - \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= 4.17
\end{aligned}
$$

olur.



Şekil 2.23: $y = x^2, y = x$

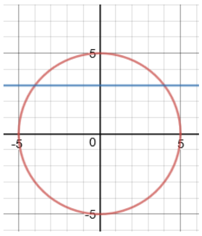
Örnek 2.3.17.

$y = x^2$ ile $y = x$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
A = \int_0^1 |(x - x^2|\,dx = \qquad = \left|\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

olur.



Şekil 2.24: $x^2 + y^2 = 25 y = 3$

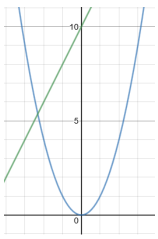
Örnek 2.3.18.

$x^2 + y^2 = 25$ ile $y = 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
A = \int_{-4}^{4} |(-3 + 2\sqrt{25 - x^2})|\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= 50 \sin^{-1}(\frac{4}{5}) \\
&= 46.3648
\end{aligned}
$$

olur.



Şekil 2.25: $y = x^2, y = 2x + 10$

Örnek 2.3.19.

$x^2 + y^2 = 25$ ile $x = 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
A = \int_{-5}^{5} |(+2\sqrt{25 - x^2})|\,dx = 25\pi
$$

$$
= 7.53.98
$$

olur.

Örnek 2.3.20.

$y = x^2$ ile $x = 2x + 10$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{3} |2x + 10 - x^2| dx &= \left(\frac{2}{2}x + 3 + 10x - \frac{1}{3}(x^3)\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= 9 + 30 - \frac{27}{3} - (4 - 20 + \frac{8}{3} \\
&= (9 + 30 - 9) - (4 - 20 + \frac{8}{3}) \\
&= 30 - (-16 + 2.67) \\
&= 30 - (13.33) \\
&= 43.33
\end{aligned}
$$

olur.

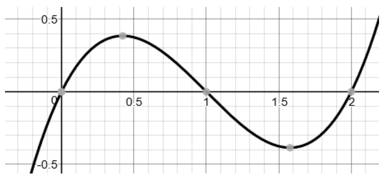
Şekil 2.26: $y = 4x^2, y = \frac{x+2}{7}$

Örnek 2.3.21.

$y = 4x^2$ ile $y = \frac{x+2}{7}$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{0.5}^{2} |\frac{x+2}{7} - 4x^2| dx &= \frac{1}{7}\int_{0.5}^{2} x + 2 - 4\int_{0.5}^{2} x^2 dx \\
&= \frac{1}{7}\left(\frac{x^2}{2} + 2x - 4\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0.5}^{2} \\
&= \frac{1}{7}(2 + 4 - 0.125 + 1) - 4\left(\frac{8}{3} - \frac{0.125}{3}\right) \\
&= \frac{1}{7}(6 - 1.125) - 4(2.67 - 0.04) \\
&= \frac{1}{7}(4.875]) - 4(2.63) \\
&= 9.82
\end{aligned}
$$

olur.



Şekil 2.27: $y = x(x-1)(x-2), y = 0$

Örnek 2.3.22.

$y = x(x-1)(x-2)$ ile Ox ekseni arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Grafiği çizersek, istenen alanın $[0,1]$ aralığında pozitif $[1,2]$ aralığında negatif olduğunu görebiliriz. Ohalde toplam alan şöyle olacaktır:

Pozitif alan,

$$
\begin{aligned}
A = \int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x) dx &= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\Big|_{0}^{1} \\
&= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big|_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{4} - 1 + 1 - (0) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

olur.

Negatif alan,

$$
\begin{aligned}
B = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx &= \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\Big|_1^2 \\
&= (\frac{16}{4} - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1) \\
&= 0 - \frac{1}{4} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

olur.

Toplam alan

$$A = A + |B| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \tag{2.15}$$

olur.

Örnek 2.3.23.

$y = x(x-3)$ ile Ox ekseni arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Grafiği çizersek, istenen alanın $[0,3]$ aralığında negatif $[3,25]$ aralığında negatif olduğunu görebiliriz. Ohalde toplam alan şöyle olacaktır:

Negatif alan,

$$
\begin{aligned}
A = \int_0^3 (x^2 - 3x)dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^2}{2}\Big|_0^3 \\
&= (\frac{27}{3} - \frac{3\times 9}{2}) - (\frac{0}{3} - \frac{3\times 0}{2})\Big|_0^3 \\
&= (9 - \frac{27}{2}) - (0) \\
&= -4 - \frac{1}{2} \\
&= -4.5
\end{aligned}
$$

olur.

Pozitif alan,

$$
\begin{aligned}
B = \int_3^5 (x^2 - 3x)dx &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^2}{2}\Big|_3^5 \\
&= (\frac{125}{3} - \frac{3\times 25}{2}) - (\frac{27}{3} - \frac{3\times 9}{2})\Big|_0^3 \\
&= (41 + \frac{2}{3} - 37 - \frac{1}{2}) - (9 - 13.5) \\
&= 8 + \frac{2}{3} \\
&= \frac{26}{3}
\end{aligned}
$$

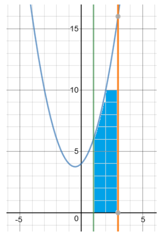
olur.

Toplam alan

$$A = |A| + B = 4.5 + \frac{26}{3} = 13 + \frac{2}{3} \tag{2.16}$$

olur.

Örnek 2.3.24.



Şekil 2.28: $y = x^2 + x + 4, y = 0$

$y = x^2 + x + 4$ ile Ox ekseni arasında ve [1,3] aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} A = \int_1^3 (x^2 + x + 4)dx &= \frac{x^3}{3}\frac{x^2}{2} + 4x\Big|_1^3 \\ &= (\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 12) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4) \\ &= \frac{51}{2} - \frac{29}{6} \\ &= \frac{62}{3} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.3.25.

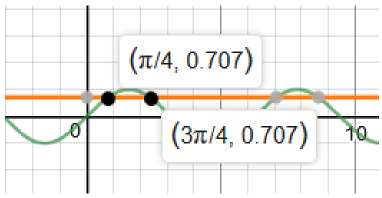
$y = x(3 - x)$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Parabol ile doğrunun kesişim noktalarının apsisleri $x = 0$ ile $x = 2$ dir. İstenen alan pozitif bölgededir. O bölgede $x(3 - x) \geq x$ dir. Ohalde

$$\begin{aligned} A = \int_0^2 (x(3 - x)) - (x)dx &= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 \\ &= (6 - \frac{8}{3} - 0 - (2 - 0) \\ &= \frac{10}{3} - 2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

olur.



Şekil 2.29: $y = \sin x, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Örnek 2.3.26.

$y = \sin x$ eğrisi ile $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

$y = \sin x$ eğrisi ile doğrunun kesişim noktalarının apsisleri $x = \frac{\pi}{4}$ ile $x = \frac{3\pi}{4}$ dür. İstenen alan pozitif bölgededir. O bölgede $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ dir. Ohalde eğri altında kalan alan

$$\begin{aligned} A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x dx &= \cos x|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\ &= \left[\cos(\frac{3\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{4})\right] \\ &= \left[-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olur.

Bundan doğru altında kalan alanı çıkarmalıyız. Doğru altında kalan alan

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

dir. Öyleyse istenen alan

$$\begin{aligned} C &= A - B \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{4-\pi}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

olur.

Örnek 2.3.27.

$y = 3x^2 - 5x + 3$ ile $y = -x^2$ eğrilei arasında kalan düzlemsel alanını bulunuz.

Çözüm:

Birinci parabolun kökleri yoktur;öyleyse Ox eksenini kesmez. Baş katsayı pozitif olduğundan parabol üst yarı düzlemdedir. İkinci parabol başlangıç noktasından geçer ama eğri alt yarı düzlemdedir. Dolayısıyla bu iki eğri kesişmez ve ortak bir düzlemsel alan belirlemez. Bu durumda sorunun yanıtı $Alan = 0$ olacaktır.

Ama istersek, belirli integrak formülünü uygulayabiliriz. İntegral sınırları için $3x^2 - 5x + 3 - x^2 = 0$ denkleminin köklerini alırsak,

$$\begin{aligned} A = \int_1^{1.5} [(3x^2 - 5x + 3) - x^2] dx &= \frac{2x^3}{3} \frac{5x^2}{2} + 3x \Big|_1^{1.5} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

çıkar. Ancak bu sonucun problemde istenen alan değil, $3x^2 - 5x + 3) - x^2 = 0$ eğrisi ile Ox ekseni arasında kalan alan olduğunu bilmeliyiz.

Örnek 2.3.28.

Aşağıdaki belirli integrali bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} A = \int_{-2}^{2} [(7 + 3x - 2x^2 - x^3) - (-x - 1)] dx &= -\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 6x \Big|_{-2}^{2} \\ &= -\frac{104}{3} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 2.3.29.

Aşağıdaki belirli integrali bulunuz.
Çözüm:

$$A=\int_{-3}^{3}[(7+2x-3x^2-x^3)-(-7x+20)]\,dx=-\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{9x^2}{2}-27x\Big|_{-3}^{3}$$
$$=-108$$

çıkar.

Örnek 2.3.30.

Aşağıdaki belirli integrali bulunuz.
Çözüm:

$$A=\int_{-1}^{1}[(x^3-x^2-4x)-(-3x-1)]\,dx=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\Big|_{-1}^{1}$$
$$=\frac{4}{3}\approx 1.3333$$

çıkar.

Örnek 2.3.31.

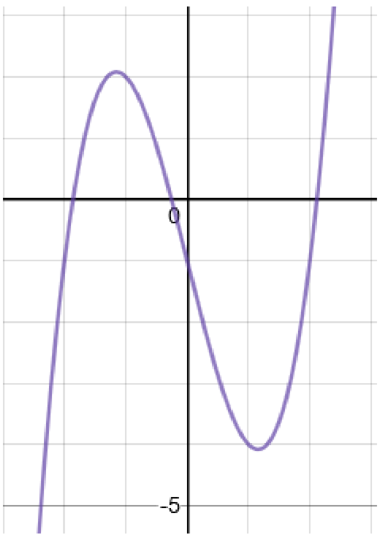
$y=(3-2x-x^2)-(x-5)$ eğrisi ile Ox ekseni arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.
Çözüm:
$(3-2x-x^2)-(x-5)=0$ denkleminin kökleri $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ olduğundan istenen alan,

$$A=\int_{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}[(3-2x-x^2)-(x-5)]\,dx=-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+8x\Big|_{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$$
$$=\frac{35\sqrt{5}}{6}\approx 13.044$$

çıkar.

Örnek 2.3.32.

$y=(x^3-(4x+1))$ eğrisi ile Ox ekseni arasında ve [0,2] aralığı üzerinke kalan düzlemsel alanı bulunuz.
Çözüm:
$(x^3-(4x+1)=0$ denkleminin kökleri $x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ olduğundan istenen alan,



Şekil 2.30: $y=(x^3-(4x+1)),\ y=0$

$$A=\int_{0}^{2}[((x^3-(4x+1)]\,dx=-\frac{x^4}{4}-2x^2-x\Big|_{0}^{2}$$
$$=-6$$

çıkar.

Örnek 2.3.33.

$y=(8x-x^2-2x)$ parabolü ile $y=0$ ekseni arasında ve [0,8] aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanı bulunuz.
Çözüm:

$$A = \int_0^8 [8x - x^2 - 2x]\,dx = -\frac{x^3}{3}\frac{6x^2}{2}\Big|_0^2$$
$$= \frac{64}{3} \approx 21.333$$

çıkar.

Örnek 2.3.34.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız. bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_{-1}^5 [2 + 2x - x^3]\,dx = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 5x\Big|_{-1}^5$$
$$= -78$$

çıkar.

Örnek 2.3.35.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız. bulunuz.

Çözüm:

$$I = \int_{-1}^5 [2 + 2x - x^3]\,dx = -\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 5x\Big|_{-1}^5$$
$$= -78$$

çıkar.

Örnek 2.3.36.

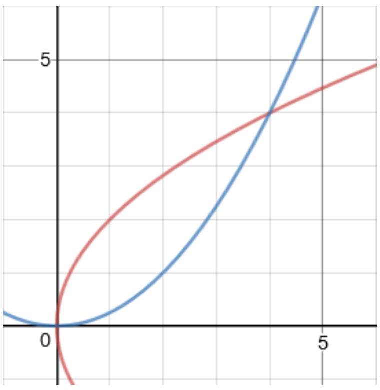
Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız. bulunuz.

Çözüm:

$$I = \int_0^3 [(x^2 + 3x - 4) - (x^2 - 2x + 1)]\,dx = 5\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_0^3$$
$$= \frac{15}{2} \qquad = 7.5$$

çıkar.

Örnek 2.3.37.



Şekil 2.31: $y^2 = 4x, x^2 = 4y$

$y^2 = 4ax$ parabolü ile $x^2 = 4ay$ parabolü arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$A = \int_0^{4a} \left[2\sqrt{a}\,x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{4a}\right] dx = \left(2\sqrt{a}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12a}\right)\Bigg|_0^{4a}$$
$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}(4a)^{\frac{3}{2}} - \frac{64a^3}{12a}$$
$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{64a^2}{12}$$
$$= \frac{128a^2 - 64a^2}{12}$$
$$= \frac{16a^2}{3}$$

çıkar.

Örnek 2.3.38.

$y = 2x + 10$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolü arasında ve [-2,3] aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{3} \left[2x + 10 - x^2\right] dx &= \left(\frac{2x^2}{2} + 10x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= (x^2 + 10x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{3} \\
&= (9 + 30 - \frac{27}{3}) - (4 - 20 + \frac{8}{3}) \\
&= (9 + 30 - 9) - (4 - 20 + 2.67) \\
&= 30 - (-16 + 2.67) \\
&= 30 - (-13.33) \\
&= 43.33
\end{aligned}
$$

çıkar.

Örnek 2.3.39.

$y = 2x + 10$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolü arasında ve [-2,3] aralığı üzerinde kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-2}^{3} \left[2x + 10 - x^2\right] dx &= \left(\frac{2x^2}{2} + 10x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{3} \\
&= (x^2 + 10x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{3} \\
&= (9 + 30 - \frac{27}{3}) - (4 - 20 + \frac{8}{3}) \\
&= (9 + 30 - 9) - (4 - 20 + 2.67) \\
&= 30 - (-16 + 2.67) \\
&= 30 - (-13.33) \\
&= 43.33
\end{aligned}
$$

çıkar.

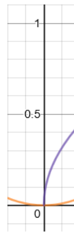
Örnek 2.3.40.

$x = y^2$ parabolü ile $x = y + 5$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Bu sorunun çözümü için koordinat eksenlerinin rollerini değiştirmek kolaylık sağlayacaktır.

$$
\begin{aligned}
A = \int_{1}^{2} \left[y + 5 - y^2\right] dy &= \left[(\frac{y^2}{2} + 5y - (\frac{1}{3}y^3)\right]\Big|_{1}^{2} \\
&= \left(2 - \frac{1}{2}\right) + (10 - 5) - \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= 4.17
\end{aligned}
$$



Şekil 2.32: $y =$

çıkar.

Örnek 2.3.41.

Şekil 2.33: $y = x^2, y = \sqrt{x}$

$y = x^2$ parabolü ile $y = \sqrt{x}$ prabolü arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Eğriler$x = 0$ ile $x = 1$ noktalarında keişir.

$$A = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]\, dx = \left[(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{3} x^3) \right]\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{3}$$

çıkar.

Örnek 2.3.42.

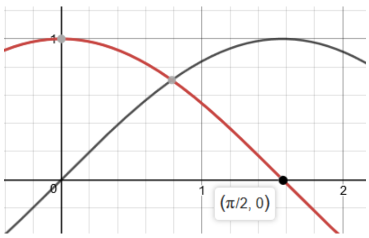
$y = 2x^2$ parabolü ile $y = 4x + 16$ doğrusu arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz. *Çözüm:*

Eğriler$x = -1$ ile $x = 3$ noktalarında keişir.

$$A = \int_{-1}^{3} \left[(4x + 16 - (2x^2 + 10) \right] dx = \int_{-1}^{3} \left[-2x^2 + 4x + 6 \right] dx \quad = \left(-\frac{2}{3} x^3 + 2x^2 + 6x \right)\Big|_{-1}^{3}$$
$$= \frac{64}{3}$$

çıkar.

Örnek 2.3.43.



Şekil 2.34: $y = \sin x, y = \cos x$

$y = \sin x$ ile $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{2}$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Eğriler $x = \frac{\pi}{4}$ noktasında kesişirler. $[0, \frac{\pi}{4}]$ aralığında $\cos x \geq \sin x$ ve $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\sin x \geq \cos x$ olduğundan, alan,

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \sin x]\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [\sin x - \cos x]\, dx$$
$$= (\sin x + \cos x)|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \sqrt{2} - 1 + \left(\sqrt{2} - 1 \right)$$
$$= 2\sqrt{2} - 2 \approx 0.828427$$

çıkar.

Örnek 2.3.44.

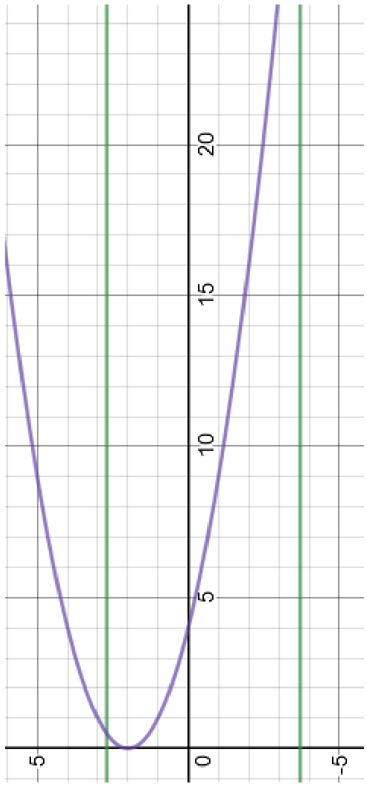
$x = \frac{1}{2} y^2 - 3$ ile $y = x - 3$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Bu sorunun çözümü için koordinat eksenlerinin rollerini değiştirmek kolaylık sağlayacaktır.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4}\left[(y+1)-\left(\frac{1}{2}y^2-3\right)\right]dy \\ &= \int_{-2}^{4}\left[-\frac{1}{2}y^2+y+4\right]dy \\ &= \left(\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}y^2+4y\right)\Big|_{-2}^{4} \\ &= 18 \end{aligned}$$

çıkar.



Şekil 2.35: $x=-y^2+10, x=(y-2)^2$

Örnek 2.3.45.

$x=-y^2+10, x=(y-2)^2$ eğrileri arasında kalan düzlemsel alanı bulunuz.

Çözüm:

Bu sorunun çözümü için koordinat eksenlerinin rollerini değiştirmek kolaylık sağlayacaktır.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{3}\left[-y^2+10-(y-2)^2\right]dy \\ &= \int_{-1}^{3}\left[-2y^2+4y+6\right]dy \\ &= \left(-\frac{2}{3}y^3+2y^2+6y\right)\Big|_{-1}^{3} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 2.3.46.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız.

$$\begin{aligned} I = \int_{-1}^{1}x^2\,dx = 2\int_{0}^{1}x^2\,dx &\\ &= 2\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

çıkar.

Örnek 2.3.47.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız.

$$\begin{aligned} I = \int_{0}^{\pi}\sin x\,dx &= -\cos x\big|_{0}^{\pi} \\ &= -(-1)+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

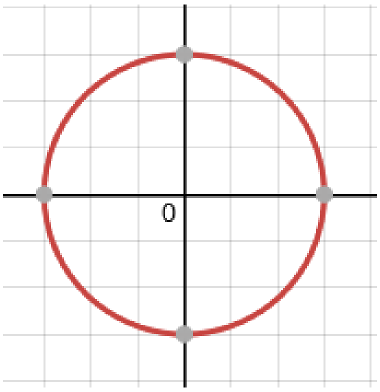
çıkar.

Örnek 2.3.48.

Aşağıdaki belirli integrali hesaplayınız.

$$
\begin{aligned}
I = \int_1^3 x^3 dx &= \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 \\
&= \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} \\
&= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{80}{4} \\
&= 20
\end{aligned}
$$

çıkar.



Şekil 2.36: çember

Örnek 2.3.49.

r yarıçaplı dairenin alanını hesaplayınız.

1.Yol: (İntegral formülünü kullanamak)

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{4} &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&= \left.\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{r}\right)\right|_0^r \\
&= \left[\frac{1}{2}\sqrt{r^2 - r^2} + \frac{r^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{r}{r}\right)\right] - \left[\frac{0}{2}\sqrt{r^2 - 0} + \frac{r^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{0}{r}\right)\right] \\
&= \frac{r^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{r}\right) \\
&= \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi r^2}{4}
\end{aligned}
$$

2.Yol: (Değişken Değiştirmek)

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{4} &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\
&\Rightarrow x = r \sin t, \quad dx = r \cos t dt \;\; konumuyla, \\
&= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2(1 - \sin^2 t)}\; r \cos t dt \\
&= r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cos^2 t)}\; \cos t dt \\
&\Rightarrow [\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \;\; konumuyla] \\
&= \frac{r^2}{2}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\, dt \\
&= 2\left.\frac{r^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\right|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{r^2}{2}\frac{r^2}{2} \\
&= \frac{\pi r^2}{4}
\end{aligned}
$$

çıkar.

Index