

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALI DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

1 Doğrual Denklem Sistemleri 3

1.0.1	Sonsuz Çözüm	20
1.0.2	Tek çözüm	20
1.0.3	Matrislerle Çözüm	21
1.1	Denk Sistemler	22
1.2	İndirgenmiş Satır Eşolon Biçimi	23
1.3	Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	24
1.4	Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	26
1.5	Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	27
1.5.1	İki Bilinmeyen için Cramer Formülü	27
1.5.2	Üç Bilinmeyen için Cramer Formülü	29
1.6	Alıştırmalar	30

10 Polinomlar 3

10.1	Bir Belirsizli Polinomlar	151
10.2	Çok Belirsizli Polinomlar	153
10.3	Terimleri Kuvvetlerine Göre Sıralama	154
10.4	İki Polinomun Eşitliği	154
10.5	Uygulamalar	155
10.6	Polinomlar Kümesi Üzerinde İşlemler	156
10.7	Toplama	156
10.8	Uygulamalar	158
10.9	Çıkarma	159
10.10	Uygulamalar	160
10.11	Çarpma	160
10.12	Sayı (skalerle) Çarpma	163
10.13	Uygulamalar	164
10.14	Başlıca Özdeşlikler	164
10.14.1	İki Terim Toplamının Karesi	164
10.14.2	İki Terimin Farkının Karesi	165
10.14.3	İki Terimin Toplamı İle Farkının Çarpımı	165
10.14.4	Üç Terim Toplamının Karesi	166
10.14.5	İki Terim Toplamının Küpü	167
10.14.6	İki Terim Farkının Küpü	168
10.14.7	İki Küp Toplamı	168
10.15	İki Terimin Kuvvetleri	170
10.16	Alıştırmalar	173

10.17	Polinomlarda Bölme	174
10.18	Uygulamalar	179
10.19	Bölme Algoritması	180
10.20	Çarpan Teoremi	181
10.21	Uygulamalar	183
10.22	Uygulamalar	184
10.23	Horner Yöntemi ile Bölme	185
10.24	Bir Polinomun $(x-a)(x-b)$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalan	186
10.25	Uygulamalar	189
10.26	Alıştırmalar	191
10.27	Polinomların Çarpanlara Ayrılması	193
10.28	Karmaşıkları Basite İndirmek!	193
10.29	ebob, ekok	194
10.30	Cebirsel İfadeleri Çarpanlara	196
10.30.1	Ortak Çarpan Parantezine Alma	197
10.31	Uygulamalar	197
10.32	Uygulamalar	199
10.33	Özdeşlikler	199
10.34	Uygulamalar	200
10.35	Uygulamalar	202
10.36	Özdeşlikleri Kullanma	202
10.37	Uygulamalar	203
10.38	Uygulamalar	205
10.39	Uygulamalar	207
10.40	Alıştırmalar	210
10.41	Başlıca Özdeşlikler	211

11 *Fonksiyonlar* 4

11.1	Fonksiyonun Grafiği	214
11.2	Tek Değerli Fonksiyonlar	215
11.3	Alıştırmalar	215
11.4	Fonksiyon Türleri	217
11.4.1	Eşit Fonksiyonlar	217
11.4.2	İçine Fonksiyon	217
11.4.3	Örten Fonksiyon	217
11.4.4	Bire Bir Fonksiyon	218
11.4.5	Bire Bir İçine Fonksiyon	218
11.4.6	Bire Bir Örten Fonksiyon	218
11.4.7	Sabit Fonksiyon	218
11.4.8	Sıfır Fonksiyon	218
11.4.9	Özdeşlik Fonksiyonu	218
11.5	Kapalı Fonksiyon	219
11.6	Örnekler	219
11.7	Alıştırmalar	220
11.8	Fonksiyonların Bileşkesi	221
11.9	Bileşke İşleminin Özellikleri	223
11.9.1	Yer Değişim Özeliği Yoktur	223

11.9.2 Birleşme Özeliği	224
11.10 Ters Fonksiyon	224
11.11 Ters Foksiyonun Grafiği	225

12 Rasyonel İfadeler 5

12.1 Alıştırmalar	227
12.2 Rasyonel İfadelerin Toplamı	227
12.3 Rasyonel İfadelerin Çarpımı	228
12.4 Rasyonel İfadelerde Bölme	229
12.5 Polinom Denklemler	229
12.6 Birinci Dereceden Polinom Denklemlerin Çözümü	229
12.7 Kombinasyon Ve Permütasyon	230
12.7.1 Kombinasyon (Combination)	230
12.7.2 Permütasyon (permutation)	230
12.7.3 Permütasyon Türleri	230
12.8 Kombinasyon Ve Permütasyon	230
12.8.1 Kombinasyon (Combination)	231
12.8.2 Permütasyon (permutation)	231
12.8.3 Permütasyon Türleri	231
12.9 İstatistik	231

13 Transandant Fonksiyonlar 5

14 Ön Trigonometri 5

14.1 Yönlü Açılar	235
14.2 Yönlü yaylar	235
14.3 Birim Çember	236
14.4 Açılı Ölçü Birimleri	236
14.4.1 Derece	236
14.4.2 Grad	237
14.4.3 Radyan	237
14.5 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	237
14.5.1 Arcsinus Fonksiyonu	237
14.5.2 ArcCosinus Fonksiyonu	238
14.5.3 Arctanjant Fonksiyonu	238
14.5.4 Arccotanjant Fonksiyonu	239
14.6 Örnekler	240
14.7 Trigonometrik Fonksiyonlar	240
14.7.1 Simetrik Açılar	243
14.7.2 Simetrikler	244
14.8 Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri	244
14.9 Özel Açılar	245
14.10 Trigonometrik Fonksiyonları Grafikleri	245
14.10.1 Cosinus Grafiği	245
14.10.2 Sinus grafiği	246
14.10.3 Tanjant Grafiği	247
14.11 Periyodik Fonksiyonlar	248

14.12	Alıştırmalar	248
14.13	Trigonometrik Fonksiyonların Limiti	249
14.14	Limitler	249
14.15	Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri	249
14.16	Alıştırmalar	254
14.17	Trigonometrik İntegraller	256
14.18	Trigonometrik Değişken Değiştirmesi	256
14.19	\sin, \cos çarpımlarının integrali	258
14.20	\sin ve \cos Fonksiyonlarının Kuvvetleri	260
14.21	$\tan^p x \cdot \sec^q x dx$ Türlerinin İntegrali	261
14.22	$\cot x$ ve \csc Fonksiyonlarının Kuvvetleri	263
14.23	Alıştırmalar	269
14.24	$\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller	271
14.25	Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri	278

15 Logaritma Fonksiyonu 6

15.1	Logaritma Fonksiyonu	282
15.2	Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	283
15.3	Doğal Logaritma Fonksiyonu	283
15.4	Taban Değiştirme Kuralı	286
15.5	Logaritma Fonksiyonunun Değişimi	286
15.6	Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	287
15.7	Logaritma Fonksiyonunun Türevi	288
15.7.1	$y = \ln x$	288
15.8	$y = a^x$	289
15.9	$y = \log_a x$	290
15.10	Alıştırmalar	290
15.11	Logaritmik integraller	291
15.12	$a > 0$ Tabanına Göre \exp ve \log	292
15.13	Alıştırmalar	293

16 Rasyonel Üslü İfadeler 6

16.1	Tamsayı Üsler	295
16.1.1	Üslü İfadelerin Özellikleri:	295
16.1.2	Negatif Üsler	296
16.1.3	Benzer Üslü İfadeler	296
16.2	Rasyonel Kuvvetler	296
16.3	Üslü Denklemler	298
16.4	Alıştırmalar	298
16.5	e Sayısı	299
16.6	Üstel Fonksiyonun Türevi	300

17 Hyperbolik Fonksiyonlar 6

17.0.1	Öteki Hyperbolic Fonksiyonlar	304
17.1	Karmaşık Sayılar İçin Hiperbolik Fonksiyonlar	304
17.2	Hiperbolik Özdeshlikler	305
17.3	Aıların Toplamı ve Farkı	306

17.4	Ters Hiperbolik Fonksiyonlar	307
17.5	Ters Hiperbolik Fonksiyonların Logaritmik İfadesi	309
17.6	Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri	313
17.7	Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri	314
17.8	Hiperboplık İntegraller	316

18 Türev Uygulamaları 7

18.1	Teğet	319
18.2	Doğru deklemleri	320
18.2.1	Doğrunun Genel Denklemi	321
18.2.2	Teğetin Denklemi	321
18.3	Problemler	322
18.4	Normal	323
18.5	Teğet Boyunca Yaklaşımındaki Hata	324
18.6	Doğrusal Yaklaşım	325
18.7	Maksimum ve Minimum değerler	326
18.7.1	Mutlak Minimum ve Mutlak maksimum	326
18.7.2	Yerel Ekstremum Değerleri	327
18.8	Kritik noktalar	328
18.9	Özet	330
18.10	Alıştırmalar	332

19 Rolle teoremi 7

19.1	Ortalama Değer Teoremi	335
19.1.1	Geometrik Yorum	337
19.2	Alıştırmalar	339
19.3	Türev Testleri ve Büyüklük	339
19.4	Büyüklük	342
19.5	Alıştırmalar	344
19.6	Eğri Çizimleri	345
19.7	Asimptotlar	345
19.7.1	Dikey Asimptotlar	346
19.7.2	Yatay Asimptotlar	347
19.7.3	Eğik Asimptotlar	348
19.7.4	Eğrisel Asimptotlar	349
19.8	GrafikÇizimleri	350
19.9	Alıştırmalar	354
19.10	Optimizasyon Problemleri	354
19.11	İş ve Ekonomide Marjinal Analiz	357
19.12	Alıştırmalar	358
19.13	Bağlantılı Oranlar	359
19.14	Minimum ve Maksimum	360
19.15	Alıştırmalar	362
19.15.1	Çözülmüş Örnekler	362
19.16	Alıştırmalar	365
19.17	L'Hospital Kuralı	367
19.18	Limit Problemlerini Kolaylaştırma	369
19.19	1^∞ , 0^∞ , $(\infty)^0$ Belirsizlikleri	372

19.20	Çözülmüş Örnekler	373
19.21	Alıştırmalar	374

20 Belirli İntegral 8

20.1	Bölüntü	375
20.2	Belirli İntegral Kuralları	376
20.3	Calculus'un Temel Teoremleri	380
20.3.1	Calculus'un 1.Temel Teoremi	380
20.3.2	Calculus'un İkinci Temel Teoremi	381
20.4	Belirli İntegral Kuralları	385
20.5	Düzensiz İntegraller	389
20.5.1	Aralığın sonsuz olması durumu:	390
20.5.2	Aralığın içinde fonksiyonun sınırsız olması durumu:	390
20.6	Belirsiz İntegral	393
20.6.1	Belirsiz İntegral Formülleri	393
20.7	Değişken Değiştirme	393
20.8	Trigonometrik İntegraller	395
20.9	Ters Trigonometrik Konumlar	397
20.10	Çözümlü Problemler	398
20.11	Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	404
20.11.1	Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	404
20.11.2	Basit Kesirlere ayırma	405
20.11.3	Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa	408
20.12	Alıştırmalar	411

21 Belirsiz İntegral 8

21.0.1	Belirsiz İntegral Formülleri	417
21.1	Değişken Değiştirme	417
21.2	Trigonometrik İntegraller	419
21.3	Ters Trigonometrik Konumlar	421
21.4	Çözümlü Problemler	422
21.5	Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri	428
21.5.1	Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse	428
21.5.2	Basit Kesirlere ayırma	429
21.5.3	Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa	432
21.6	Karma problemler	435
21.7	Alıştırmalar	443
21.8	Riemann İntegrali	443
21.8.1	Belirli İntegral	443
21.9	İntegral İçin Ortalama Değer	445
21.10	Alıştırmalar	448
21.11	Trigonometrik İntegraller	448
21.12	Trigonometrik Değişken Değiştirimi	448
21.13	sin, cos çarpımlarının integrali	450
21.14	sin ve cos Fonksiyonlarının Kuvvetleri	452
21.15	$\tan^p x \cdot \sec^q x dx$ Türlerinin İntegrali	453
21.16	cot x ve csc Fonksiyonlarının Kuvvetleri	455
21.17	Alıştırmalar	461

21.18	$\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller	463
21.19	Logaritmik integraller	470
21.20	Alan hesapları	471
21.21	Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu	472
21.22	Belirli İntegral Kuralları	474
21.23	Dönel Cisimleri Hacimleri	478
21.24	Silindirik Kabuklar Yöntemi	479
21.25	Dilimleme Yöntemiyle Hacim Bulma	481
21.26	Örnek Hacim Hesapları	482

22 Doğal Logaritma Fonksiyonu 9

22.1	Doğal Logaritma Fonksiyonunun Tanımı	486
22.2	Tanım bölgesini Genişletme	486
22.3	Doğal Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri	487
22.4	Doğal Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	488
22.5	Logaritmik Türev	488
22.6	Logaritmik Türevin İntegrali	488
22.7	Üstel Fonksiyon	489
22.8	a tabanlı Üstel Fonksiyon	489
22.9	a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Davranışı	490
22.10	a Tabanlı Üstel Fonksiyonun Türevi	491
22.11	a Tabanlı Üstel Fonksiyonun İntegrali	491
22.12	a Tabanına Göre Logaritma	491
22.13	$\log_a x$ fonksiyonunun özellikleri	491
22.14	$\log_a x$ fonksiyonunun Türevi	491
22.15	Çözümlü Problemler	492

23 İntegral Alma Yöntemleri 9

23.1	Belirsiz İntegral	497
23.2	İlkel Fonksiyon Biliniyorsa	497
23.3	Sürekli Fonksiyonların İntegrali	498
23.4	Değişken Değiştirme	499
23.5	$\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu	502
23.6	Kısmi İntegrasyon	505
23.7	Polinomların Çarpanlara Ayrılması	508
23.8	Basit Kesirlere Ayırma	511
23.9	Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi	511
23.10	Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması	515
23.11	Rasyonelleştirme	517
23.12	Köklü İfadelerin İntegrali	518
23.13	Alıştırmalar	524
23.14	İndirgenme Yöntemleri	524
23.15	Bazı İndirgeme Formülleri	526
23.16	Bağılantılı Oranlar	527

24 Kutupsal Koordinatlar 9

24.1	Kutupsal Koordinatlarda Grafik	531
------	--	-----

24.2	Alıştırmalar	532
24.3	Kutupsal Koordinatlarda Grafik Çizimi Örnekleri	533
24.3.1	Merkeze Göre Simetri	533
24.3.2	Ox – Eksenine Göre Simetri	533
24.3.3	Oy – Eksenine Göre Simetri	533
24.4	Grafik Çiziminde İzlenecek Yol:	535
24.5	Alıştırmalar	536
24.6	Kutupsal Sistemde Teğetin Eğimi	536
24.7	Kutupsal Kordinatlarda Alan hesabı	537
24.8	İki kutupsal eğri arasında kalan alan	538
24.9	Kutupsal Koordinatlarda Yay Uzunluğu	540
24.10	Kutupsal Koordinatlarda Dönel Yüzeyler	540
24.11	Alıştırmalar	541
24.12	Parametrik Fonksiyonların Türevi	542
24.13	İkinci Basamaktan Türev	543
24.14	Alıştırmalar	545
24.15	Sayısal İntegraller	547
24.15.1	Dikdörtten Yöntemi	547
24.16	Yamuk Kuralı	548
24.17	Pappus teoremleri	549
24.18	Alıştırmalar	550
24.18.1	Dairesel Simit'in Yüzeyi	551
24.18.2	Dairesel Simit'in Hacmi	551
24.19	Simpson Yöntemi	551
24.20	Alıştırmalar	554
24.21	Alan Hesabı	555
24.22	İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	555

25 Diziler 10

25.0.1	Örnekler	560
25.0.2	Yakınsak Dizi	560
25.1	Aritmetik Dizi	561
25.2	Geometrik Dizi	562
25.3	Monoton Dizi	562
25.4	Alt dizi	562
25.5	Sınırlı dizi	563
25.6	Dizilerde Limit Özellikleri	563
25.7	Alıştırmalar	568

26 Seriler 10

26.0.1	Kısmi Toplam	570
26.1	Yakınsak Seriler	570
26.2	Rasyonel Terimli Seriler	570
26.3	Özel Seriler	571
26.4	Aritmetik Seri	571
26.5	Geometrik Seri	572
26.6	Binom Serisi	573
26.7	Genelleşmiş Binom Teoremi	574

26.8	Serilerin Özellikleri	575
26.9	Alıştırmalar	578
26.10	Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	578
26.11	Yakınsaklık Aralığı	579
26.12	Kuvvet Serileri Üzeinde Cebirsel İşlemler	580
26.13	Toplama ve Çıkarma	580
26.14	Kuvvet Serilerin Çarpımı	581
26.15	Kuvvet Serilerinin Bölümü	581
26.15.1	Alterne Seriler	581
26.16	Alıştırmalar	584
26.17	Cauchy Dizi ve Serileri	585

27 Seriler İçin Yakınsaklık Testleri 11

27.1	p-serisi	592
27.2	Oran Testi	592
27.3	Kök Testi	595
27.4	İntegral Testi: p-serisi	595
27.5	p-serisi	597
27.6	Karşılaştırma Testleri	598
27.7	Limit Karşılaştırma Testi	600
27.8	Oran Testi	603
27.9	Newton Metodu	607

28 Değişken Terimli Seriler 11

28.1	Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	611
28.2	Yakınsaklık Aralığı	612
28.3	Kuvvet Serileri Üzeinde Cebirsel İşlemler	613
28.4	Toplama ve Çıkarma	613
28.5	Kuvvet Serilerin Çarpımı	613
28.6	Kuvvet Serilerinin Bölümü	614
28.7	Maclaurin Serisi Uygulamaları	614
28.8	Düzgün Yakınsama	617
28.8.1	Fonksiyon Dizileri	617
28.8.2	Fonksiyon Serileri	621
28.8.3	Fonksiyon Dizileri İçin Cauchy Kriteri	623
28.8.4	Fonksiyon Serileri İçin Cauchy Kriteri	624
28.9	Alıştırmalar	626
28.10	Fonksiyon Dizi ve Serilerinin İntegrali	626
28.11	Dirichlet ve Abel Testleri	630
28.12	Dirichlet Testi	631
28.13	Fonksiyon Dizi ve Serilerinin Türevlenmesi	633
28.14	Alıştırmalar	634
28.15	Kuvvet Serilerinin Türevlenmesi	636
28.16	Alıştırmalar	638
28.17	Kuvvet Serilerinin İntegrali	639
28.18	Çözümlü Kuvvet Serisi Problemleri	640
28.19	Alıştırmalar	643
28.20	Serilerin Yaklaşık Toplamı	644

28.21	Alıştırmalar	646
-------	------------------------	-----

29 Vektörler 12

29.1	Vektör Uzayı	647
29.2	Simgeler	648
29.3	Denk Vektörler	648
29.4	Vektörlerin Gösterimi	648
29.5	Vektör Uzayında İşlemler	649
29.5.1	Sıfır Vektörü	649
29.6	Vektörlerin Toplamı	649
29.6.1	Toplamanın Özellikleri	650
29.7	Vektörlerde Çıkarma İşlemi	650
29.8	Vektörün Sayı ile Çarpımı	650
29.9	Birim Vektör	651
29.10	Doğrultu Açıları	651
29.11	Analitik Geometriye Giriş	652
29.12	Alıştırmalar	653
29.13	Bileşenlerle İşlemler	654
29.14	Nokta Çarpım	655
29.15	İzdüşüm	656
29.15.1	İzdüşümün Genellenmesi	656
29.16	İki Vektör Arasındaki Açık	657
29.17	İki Vektör Arasındaki Açımın Ölçümü	658
29.18	İki Vektörün Birbirine Dikliği	658
29.18.1	Üçgen Eşitsizliği	659
29.19	Uzayda Doğru ve Düzlem	660
29.20	İki noktası Verilen Doğru Denklemi	660
29.21	Noktanın Doğruya Uzaklığı	661
29.22	Düzlem Denklemi	662
29.23	Üç Noktadan geçen Düzlem Denklemi	662
29.24	Noktanın Düzleme Uzaklığı	663
29.25	Alıştırmalar	664
29.26	Vektörel Çarpım	665
29.27	Vektörel Çarpımın Özellikleri	666
29.28	Vektörel Çarpımı Geometrik Yorumları	666
29.28.1	Diklik	666
29.28.2	Alan	667
29.29	Üçlü Çarpım	667
29.30	Alıştırmalar	668
29.31	Uzayda Doğru ve Düzlem	668
29.32	İki noktası Verilen Doğru Denklemi	669
29.33	Noktanın Doğruya Uzaklığı	670
29.34	Düzlem Denklemi	670
29.35	Üç Noktadan Geçen Düzlem Denklemi	671
29.36	Noktanın Düzleme Uzaklığı	672
29.37	Alıştırmalar	673

30 Katlı İntegral 12

30.1	İki Katlı İntegralin Özellikleri	676
30.2	Ardışık İntegral	677
30.3	Katlı İntegral Uygulamaları	688
30.4	Alıştırmalar	693
30.5	Katlı integralde değişken değiştirme	693
30.6	Alıştırmalar	696
30.7	İki Katlı İntegral İle Düzlemsel Alan Hesabı	697
30.8	Alıştırmalar	699
30.9	İki Katlı İntegral İle Hacim hesapları	700
30.10	Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller	701
30.11	Alıştırmalar	704

31 Üç Katlı İntegraller 13

31.1	Hacim	709
31.2	Alıştırmalar	711
31.3	Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	711
31.4	Alıştırmalar	712
31.5	Silindirselsel Koordinatlar	712
31.5.1	Silindir Nedir?	712
31.6	Alıştırmalar	716
31.7	Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	716
31.8	Alıştırmalar	720

32 Eğrisel İntegraller 13

32.1	Düzlemde Eğrisel İntegral	721
32.2	Uzayda Eğrisel İntegral	726
32.3	Alıştırmalar	729
32.4	Vektör Alanlarının Eğrisel İntegralleri	729
32.5	Divergence	730
32.6	Vector Alanını Eğrisel İntegrali	732
32.7	Eğrisel İntegrallerle İş	734
32.8	Alıştırmalar	736
32.9	İntegralin Yoldan Bağımsızlığı	736
32.10	Alıştırmalar	741
32.11	Üç Boyutlu Uzayda Korunumlu Vektör Alanı	741
32.12	Green Teoremi	742
32.13	Green teoremi İle Alan Hesabı	745
32.14	Alıştırmalar	746
32.15	Yüzey İntegralleri	746
32.16	Parametrik Yüzeyin Alanı	748
32.17	Yüzey İntegrali	751
32.18	Yönlendirilmiş Yüzey Üzerinde İntegral	753
32.19	Vektör Alanlarının İntegrali	754
32.20	Stokes Teoremi	755
32.21	Divergence Teoremi	759
32.21.1	Alıştırmalar	762

33 Vektör Değerli Fonksiyonlar 13

33.1	Vektör Değerli Fonksiyonlar ve Uzay Eğrileri	763
33.2	Vektör Değerli Fonksiyonların Limiti	764
33.2.1	Limit	764
33.3	Vektör değerli Fonksiyonların Sürekliliği	766
33.4	Süreklilik	766
33.5	Türev	766
33.6	Türev Kuralları	767
33.7	Vektör değerli Fonksiyonların Teğeti	768
33.8	Düzgün Eğri	768
33.8.1	Düzgün Eğriler	769
33.9	Vektör Değerli Fonksiyonların integrali	769
33.9.1	Belirsiz İntegral	769
33.9.2	Belirli İntegral	770
33.10	Alıştırmalar	771
33.11	Eğri Uzunluğu	772
33.12	Eğrilik	773
33.13	Eğrilik Çemberi	775
33.14	Normal ve İkinci Normal Vektörler	776
33.15	Alıştırmalar	777
33.16	Uzayda Hareket	778
33.17	Kepler Yasaları	780
33.18	Alıştırmalar	780

34 Konikler 14

34.1	Koniklerin Adlandırılması	781
34.2	Koniklerin Kutupsal Sistemdeki Denklemleri	781
34.3	Koniklerin Kartezyen Denklemi	783
34.4	Alıştırmalar	785
34.5	İkinci Dereceden Yüzeyler	785
34.6	Elipsoid	787
34.7	Elipsoid	787
34.8	Hiperboloid	787
34.9	Eliptik Paraboloid	790
34.10	Eliptik Koni	790
34.11	Alıştırmalar	791

35 Fiziksel uygulamalar 14

35.1	Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	793
35.2	Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	793
35.3	Alıştırmalar	797
35.4	Yay'ın Kütle merkezi	797
35.5	Alıştırmalar	797
35.6	Yoğunluk	797
35.7	Moment	798
35.7.1	Noktaya Göre Moment	798
35.7.2	Doğru üzerinde Moment	798

35.8	Kütle Merkezi	799
35.9	Noktanın Eksene Göre Momenti	799
35.10	Düzleme Göre Moment	800
35.11	Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	801
35.12	Bir Yayın Momenti	801
35.13	Uygulamalar	802
35.14	Üç Katlı İntegral İle Moment	803
35.15	Düzlemsel Bölgelerin Kütle Merkezi	804
35.16	Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	805
35.17	Alıştırmalar	808
35.18	Yay'ın Kütle merkezi	808
35.19	Alıştırmalar	809
35.20	Yoğunluk	809
35.21	Work (İş)	810

36 Diferensiyel denklemler 15

36.1	Birinci basamaktan birinci dereceden Diferensiyel denklemler	813
36.2	Özel ve Genel Çözüm	814
36.3	Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	814
36.4	Denklemin Doğrusala Dönüşmesi	816

37 Diferensiyel Denklemler 15

37.1	Tek Değişkenli Diferensiyel Denklemler	817
37.2	Tam Diferensiyel	819
37.3	Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	826
37.4	Alıştırmalar	829
37.5	İntegral Çarpanı	830
37.6	Alıştırmalar	838
37.7	Birinci Basamaktan Homojen denklemler	840
37.8	Alıştırmalar	848
37.9	Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	850
37.10	Alıştırmalar	854
37.11	Tam Diferensiyel	855
37.12	Alıştırmalar	860
37.13	Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler	862
37.14	Alıştırmalar	865
37.15	İntegral Çarpanı	867
37.16	Alıştırmalar	874
37.17	Birinci Basamaktan Homojen denklemler	875
37.18	Alıştırmalar	880
37.19	Birinci Basamaktan Doğrusal Diferensiyel Denklemler	881
37.20	Alıştırmalar	886
37.21	Bernoulli Diferensiyel Denklemi	887
37.22	Bernoulli Diferensiyel Denkleminin Çözümü	887
37.23	Çözümlü Örnekler	888
37.24	Alıştırmalar	891
37.25	Riccati Diferensiyel Denklemi	892

37.26	Clairaut Diferensiyel denklemleri	896
37.27	Lagrange Diferensiyel Denklemi	897
37.28	Alıştırmalar	899

38 Üç Katlı İntegraller 16

38.1	Hacim	903
38.2	Alıştırmalar	905
38.3	Üç Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme	905
38.4	Alıştırmalar	906
38.5	Silindirselsel Koordinatlar	907
38.6	Üç Katlı İntegrallerde Küresel Koordinatlar	909
38.7	Alıştırmalar	912
38.8	Düzensiz İntegraller	913
38.9	Aralığın Sonsuz Olması Durumu	913
38.9.1	$[a, \infty)$ aralığında integral	913
38.9.2	$(-\infty, a]$ aralığında integral	913
38.9.3	$(-\infty, \infty)$ aralığında integral	914
38.10	Aralığın uç noktalarında fonksiyonun sınırsız olması durumu: 914	
38.10.1	Sol Uç	914
38.10.2	Sağ Uç	914
38.11	Aralığın içinde fonksiyonun sınırsız olması durumu:	914
38.12	Düzensiz intgralleri karşılaştırma:	915
38.12.1	Alıştırmalar	923
38.13	Düzlemsel bölgelerin kütle merkezi	923
38.14	Ağırlık Merkezi Bulma Problemleri	924
38.15	Alıştırmalar	927
38.16	Yay'ın Kütle merkezi	927
38.17	Alıştırmalar	928
38.18	Yoğunluk	928
38.19	Sıvı Basıncı	928
38.20	Work (İş)	930
38.21	Pappus teoremleri	931
38.22	Alıştırmalar	932
38.23	Simpson Yöntemi	933
38.24	Yamuk Kuralı	935
38.25	Moment	937
38.26	Noktaya Göre Moment	937
38.27	Doğru üzerinde Moment	937
38.27.1	Kütle Merkezi	938
38.28	Noktanın Eksene Göre Momenti	938
38.29	Düzleme Göre Moment	938
38.30	Bir Düzlem Parçasının Bir Eksene Göre Momenti	939
38.31	Bir Yayın Momenti	940
38.32	Uygulamalar	941

39 Belirli İntegral Uygulamaları 16

39.1	Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu	943
39.2	Alan hesapları	946

39.3	Foksiyonun Orta Değeri	947
39.4	Hacim hesapları	948
39.5	Dönel Cisimleri Hacimlerin	949
39.6	Silindirik Kabuklar Yöntemi	950
39.7	Dilimleme Yöntemiyle Hacim Bulma	952

Index 17

1 Doğrusal Denklem Sistemleri

Denklem sistemi sonlu sayıda değişken (belirsiz) içeren sonlu sayıda denklemden oluşan eşitlikler topluluğudur. Özel olarak değişkenlerin hepsinin derecesi 1 ise, sisteme *doğrusal denklem sistemi* denilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 = -2 \\ -x + \frac{1}{2}y - z &= 0 \\ -x + \frac{1}{2}y - z &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

topluluğu bilinmeyenleri x, y, z olan üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemidir. Algıyı kolaylaştırmak için aynı adlı bilinmeyenler alt alta yazılır.

Sistemdeki her denklemi sağlayan x, y, z değerlerine sistemin bir çözüm kümesi denilir. Yukardaki sistemin her denklem

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

değerleri tarafından sağlanır. Dolayısıyla, sırasıyla $\{x, y, z\}$ için $\{1, -2, -2\}$ değerleri (1.1) sisteminin bir çözüm kümesidir.

Bir doğrusal denklem sisteminin hiç çözümü olmayabilir, tek çözümü olabilir ya da sonsuz çözümü olabilir. Bilinmeyen sayısı iki ise, sistemdeki her denklem düzlemde bir doğrunun denklemidir. Bu sistemin tek çözümünün olması için doğruların bir noktada kesişmesi gerekir.

Sistemde üç bilinmeyen varsa, sisteme ait her denklem üç boyutlu uzayda bir düzlem gösterir. Böyle bir sistemin tek çözümünün olması için, düzlemlerin bir noktada kesişmesi gerekir.

Sistemde bilinmeyen sayısı $n > 3$ ise, denklemlerin her birisi n -boyutlu uzayda bir *hiper düzlem* gösterir. Hiper düzlemi duyu organlarımız farkedemez. Ancak akıl yürütmeye hiper düzlemin varlığını söyleyebiliriz. n boyutlu uzayda verilen doğrusal denklemin tek çözümünün olması için sisteme ait hiper düzlemlerin tek bir noktada kesişmesi gerekir.

Doğrusal denklem sistemlerine uygulamada çok karşılaşılr. Bunların ayrıntılı incelenmesi Doğrusal (Lineer) Cebir derslerinde yapılacaktır. Bu kitapta ispatların ayrıntısına girmeden doğrusal denklem sistemlerinin çözümü için pratik bilgiler verilecektir.

1. Grafıksel Çözüm: Değişken sayısı 3 ü geçmiyorsa sistemi oluşturulan denklemlerin grafiğini çizerek, hepsinin bir noktada kesişip

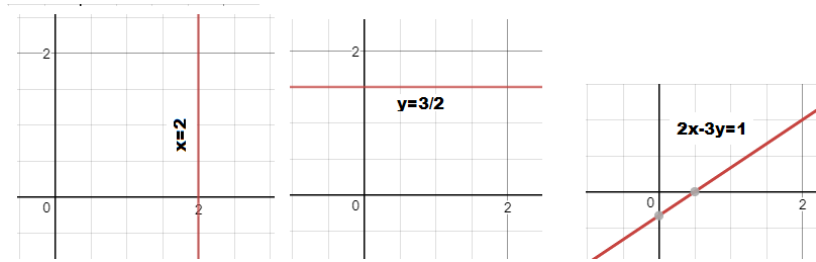
kesişmediğini görebiliriz. Bir noktada kesişiyorlarsa, o noktanın koordinatları aranan çözüm olur.

2. *Yerine koyma* Sistem ait denklemlerin birisinden bir değişkenin değeri öteki(ler) cinsinden yazılabilir. Bu değer öteki denklemlerde kullanılırsa, sistemdeki denklem sayısı 1 azalır. Bu işe devam ederek, değişken sayısını 1'e kadar indirebiliriz.
3. *Eleme Yöntemiyle Çözüm*: Gauss-Jordan yöntemi olarak da bilinen bu yöntem esas olarak yerine koyma yöntemine denktir. Sistemdeki iki denklemde bir değişkenin katsayılarını eşitledikten sonra toplama ya da çıkarma yöntemiyle o değişkeni eleyebiliriz. Çıkan denklemden bir değişkeni çekip öteklerde yerlerine koyarsak, bütün sistemde değişken sayısı 1 azalır. Bu işe devam edersek sistemdeki değişken sayısını 1'e kadar indiririz.
4. *Matris Yöntemi*: Bu yöntem sistemdeki denklem sayısı değişken sayısına eşit ve katsayılar matrisinin determinanı sıfır değilse çok değişkenli sistemler için kullanılan oldukça genel bir yöntemdir.

Bu yöntemlerin kullanılışlarını örneklerde inceleyeceğiz.

1.0.1 Sonsuz Çözüm

Şekil 1.1: Doğru Denklemleri



Örnek 1.1.

Şekil (1.1)'deki $x = 3$, $y = \frac{3}{2}$ ve $2x - 3y = 1$ sistemlerine ait denklemlerin her birisi düzlemde bir doğru gösterir. Gerçekten birinci denklemi $x + 0y = 2$, ikinci denklemi $0x + y = \frac{3}{2}$ biçiminde yazabiliriz.

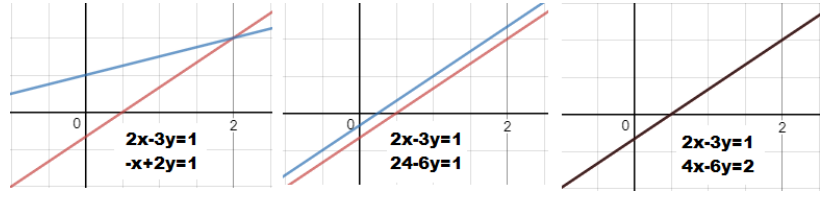
İki değişkenli her denklemin grafiği düzlemde bir doğrudur. Doğru üzerindeki her nokta bir çözümdür. Dolayısıyla iki değişkenli tek denklemden oluşan bu üç doğrusal denklem sisteminin her birisinin *sonsuz çözümü* vardır.

1.0.2 Tek çözüm

Şimdi Şekil (1.2)'deki grafiklere bakalım. Birinci grafikte kesişen iki doğru, ikinci grafikte paralel iki doğru, üçüncü grafikte ise çakışan iki doğru vardır.

(a) Birincide grafikler tek noktada kesiştiği için doğrusal denklem sisteminin tek çözümü vardır. Bu tür sistemlere *tutarlı sistem* denilir.

Şekil 1.2: Tek çözüm, çözüm yok, sonsuz çözüm



(b) ikinci sistemdeki denklemlerin grafikleri paraleldir. Kesişmezler (ortak noktaları yoktur). Dolayısıyla bu sistemin çözümü yoktur. Çözümü olmayan sistemlere *tutarlı sistem* denilir

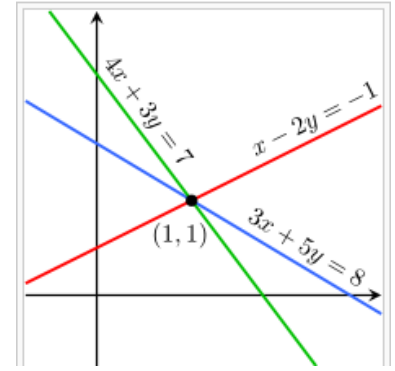
(c) Üçüncü sistemdeki iki denklemin grafikleri çakışıyor. Doğrular üzerindeki her nokta her iki denklemi sağlar. Dolayısıyla sistemin sonsuz çözümü vardır.

Örnek 1.2.

$$\begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ 3x + 5y &= 8 \\ 4x + 3y &= 7 \end{aligned} \quad (1.2)$$

doğrusal denklem sistemini çözümlü.

Bu sistemi yerine koyma yöntemiyle çözelim. Bu sistem iki bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir sistemdir. Birinci denklemden $x = 2y - 1$ yazabiliriz. Bunu ikinci (ya da üçüncü) denklemden kullanırsak $3(2y - 1) + 5y = 8 \Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1$ çıkar. Bulunan y değerini üçüncü denklemden (ya da herhangi birisinde) kullanırsak, $4x + 3 = 7 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$ bulunur. Çözüm kümesini bulunca mutlaka sağlamasını yapmalıyız. Bulduğumuz x, y değerleri her üç denklemi sağlıyor Demek ki çözüm $\{x, y\} = \{1, 1\}$ dir. Çözümü olduğu için bu sistem tutarlıdır.



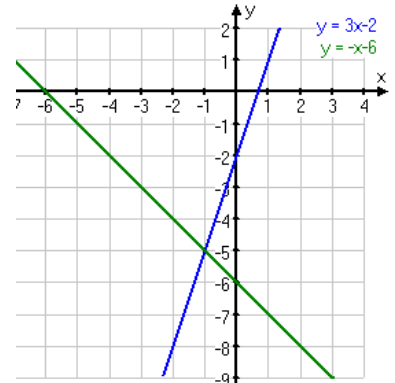
Şekil 1.3: $x - 2y = -1, 3x + 5y = 8, 4x + 3y = 7$

Örnek 1.3.

$$\begin{aligned} -3x + y &= -2 \\ x + y &= -6 \end{aligned} \quad (1.3)$$

doğrusal denklem sistemini çözümlü.

Bu sistemi eleme yöntemiyle çözelim. y değişkenlerini katsayıları eşit olduğu için, başka bir eşitlemeye gerek kalmadan, ikinci denklemden birinciyi çıkaralım: $4x = -4 \Rightarrow x = -1$ bulunur. Bu değeri denklemlerden birinde kullanırsak, $1 + y = -6 \Rightarrow y = -5$ bulunur. Sağlamasını yapmak için bulunan değerleri her iki denklemde yerlerine koyarak eşitliklerin sağlandığını görebiliriz. O halde $\{x, y\} = \{-1, -5\}$ çözüm kümesidir.



Şekil 1.4: $-3x + y = -2, -x + y = -6$

1.0.3 Matrislerle Çözüm

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1.4)$$

sistemi n -bilinmeyenli n denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemidir. Bu tür denklemlerin çözümü için başlıca üç yöntem izleyebiliriz.

1. Gauss-Jordan Eleme Yöntemi
2. Laplace Yöntemi
3. Cramer Yöntemi

Bunların nasıl olduğunu örnekler üzerinde açıklayacağız.

1.1 Denk Sistemler

Çözümleri aynı olan doğrusal denklem sistemlerine *denk sistemler* denilir.

Yukarıdaki doğrusal denklem sisteminden şu özelliklerin sağlandığını hemen görebiliriz:

1. Sistemdeki iki denklemin yerleri değişirse denk bir sistem oluşur. i-yinci satır ile j-yinci satırın yer değiştirmesini $S_i \longleftrightarrow S_j$ simgesiyle göstereceğiz.
2. Sistemdeki denklemlerden birisi sabit bir sayı ile çarpılırsa, denk bir sistem elde edilir. i-yinci satırın sabit bir α sayısı ile çarpımını αS_i simgesiyle göstereceğiz.
3. Sistemdeki bir denklem sabit bir sayı ile çarpılıp başka bir denklemle taraf tarafa toplansa denk bir sistem elde edilir. i-yinci satırın α ile çarpılıp j-yinci satıra eklenmesini $S_j + \alpha S_i$ ile göstereceğiz.

n bilinmeyenli n denklemden oluşan doğrusal denklem sistemi olan (1.4) sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + \dots + a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + \dots + a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} + \dots + a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

matrisidir. Bu matrisin satırları üzerine yukarıda söylenen işlemler yapılırsa, denk sistemin katsayılar matrisi elde edilir. Matrisin satırları üzerinde yapılan bu işlemlere *temel işlemler* diyeceğiz.

1.4 sisteminin sağ yanı tek sütunlu

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

matrisidir. Benzer şekilde $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bilinmeyenlerini tek kolonlu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

matrisi biçiminde yazalım.

Doğrusal Denklem Sisteminin çözümü için şu kurallar geçerlidir:

1. Katsayılar matrisinin determinanı $|A| \neq 0$ ise A^{-1} ters matrisi vardır.
2. Katsayılar matrisinin determinanı $|A| \neq 0$ ise, doğrusal denklem sisteminin bir tek çözüm kümesi vardır.
3. Katsayılar matrisinin determinanı $|A| = 0$ ise, doğrusal denklem sisteminin sonsuz çözüm kümesi vardır.
4. (1.4) doğrusal denklemi, yukarıda anılan matrisleri kullanarak $AX = B$ biçiminde yazabiliriz.
5. A^{-1} ters matrisi varsa, $AX = B$ matris eşitliğinin her iki yanını soldan A^{-1} ters matrisi ile çarparsak $X = A^{-1}B$ eşitliği bulunur. Bu eşitliğin sol yanındaki X sütunmatrisi (1.4) doğrusal denklem sisteminin çözümü olur.

1.2 İndirgenmiş Satır Eşolon Biçimi

Bu yöntem eleme yönteminin bir biçimidir. Katsayılar matrisinin sağına, sistemde eşitliklerin sağındaki sütun eklenir. Sonra temel matris işlemleri uygulanarak, soldaki matris birim matris haline dönüştürülür. Elde edilen matris, verilen denklem sistemine denk olan bir denklemin katsayılar matrisidir.

Örnek 1.4.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 2x + 3y + 5z &= 8 \\ 4x + 0y + 5z &= 2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

denklem sistemini çözüyoruz.

Çözüm:

Verilen denklemin katsayılar matrisine eşitliklerin sağında oluşan sütun matrisini ekledikten sonra belirtilen temel matris işlemlerini yapalım:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2-2S_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{S_3-4S_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 13 & -26 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\frac{1}{13}S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{S_2-3S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{S_1-S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{S_1-S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Bu matris

$$\begin{aligned} 1x \quad 0y \quad 0z &= 3 \\ 0x \quad 1y \quad 0z &= 4 \\ 0x \quad 0y \quad 1z &= -2 \end{aligned}$$

denklem sisteminin katsayılar matrisidir. Katsayılar matrisi üzerinde yalnızca temel matris işlemleri yapılmıştır. O halde, son denklem

sistemi , başta verilen denklem sistemine denktir; yani her ikisinin de çözüm kümeleri aynıdır. Son sistemin çözüm kümesi $\{x, y, z\} \{3, 4, -2\}$ kümesidir. O halde bu küme verilen ilk denklem sisteminin de çözüm kümesidir: $x = 3, y = 4, z = -2$.

1.3 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu

Eşçarpan ve determinant yardımıyla bir A matrisinin tersinin bulunması beş adımda gerçekleşir:

1. A matrisinin $|A|$ determinanı bulunur.
2. A matrisinin minörleri hesaplanır.
3. A matrisinin $\text{cof}(A)$ eşçarpanı (cofactor) bulunur.
4. $\text{cof}(A)$ eşçarpanının $[\text{cof}(A)]^T$ devriği (transpose) bulunur.
5. $[\text{cof}(A)]^T$ devriği $\frac{1}{|A|}$ ile çarpılır.

Örnek 1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm

Adım 1: A matrisinin $|A|$ determinanı:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 434$$

olur.

Adım 2: A matrisinin minörleri:

A matrisinin i -inci satır ve j -yinci kolon minörünü A_{ij} ile gösterelim:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +(-60) = -60$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(74) = -74$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(78) = 78$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(-24) = 24$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -(-41) = 41$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +(-29) = -29$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(75) = -75$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = +(27) = 27$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +(39) = 39$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -(17) = -17$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +(-29) = -29$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -(59) = -59$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = -(152) = -152$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = +(44) = 44$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = -(-24) = 24$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = +(-26) = -26$$

olur.

Adım 3: A matrisinin $\text{cof}(A)$ eşçarpını (cofactor):

A matrisi için yukarıda bulunan minörler yerlerine konulursa;

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -60 & -74 & -78 & 24 \\ 41 & -29 & -75 & 44 \\ 39 & -17 & -29 & -59 \\ -152 & 24 & 24 & -26 \end{pmatrix}$$

olur.

Adım 4: $\text{cof}(A)$ eşçarpanının devriği:

$$[\text{cof}(A)]^T = \begin{pmatrix} -60 & 41 & 39 & -152 \\ -74 & -29 & -17 & 27 \\ -78 & -75 & -29 & 24 \\ 24 & 44 & -59 & -26 \end{pmatrix}$$

olur.

Adım 5: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{cof}(A)]^T$ matrisinin hesaplanması:

Örnek 1.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin tersini bulunuz.

A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} [\text{cof}(A)]^T = \frac{1}{|A|} [\text{adj}(A)]$$

formülünden çıkar. $\text{cof}(A)$ önceki örnekte bulundu. Onun devriğini (transpose) alıp, $|A|$ determinantı ile yukarıdaki formülde yerlerine yazarsak A^{-1} ters matrisini bulmuş oluruz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 30/217 & -41/434 & -39/434 & 76/217 \\ 37/217 & 29/434 & 17/434 & 22/217 \\ -39/217 & 75/434 & 29/434 & 12/217 \\ -12/217 & -27/434 & 59/434 & 13/217 \end{pmatrix}$$

$$x - 2y = -1$$

$$3x + 5y = 8$$

$$4x + 3y = 7$$

(1.9)

1.4 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü

Örnek 1.7.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ +2y + 5z = -4 \\ 2x + 5y - z = 27 \end{cases} \quad (1.10)$$

doğrusal denklem sisteminin çözüm kümesini ters matris kullanarak bulunuz.

Çözüm

Verilen 1.10 sisteminin katsayılar matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

ve sağ yan matrisi

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

sütun matrisidir. Bilinmeyenler matrisi

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

dir. Buradan verilen 1.10 sisteminin katsayılar matrisinin tersini, minörlerini hesaplayarak bulursak;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

olur.

Artık verilen 1.10 sistemini matris biçiminde yazabiliriz.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{-21} \begin{pmatrix} -105 \\ -63 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

olur. Buradan çözüm kümesinin

$$x = 5, y = 3, z = -2$$

olduğu görülür. Çözüm işlemlerini doğru yapıp yapmadığımızı denetlemek istersek, bulduğumuz bilinmeyenleri verilen denklem sisteminde yerlerine koyarak sağlama yapabiliriz.

1.5 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü

1.5.1 İki Bilinmeyen için Cramer Formülü

Cramer yöntemiyle çözüm determinant hesaplarına dayanır. (1.4) sistemi verildiğinde her $i = 1, 2, \dots, n$ için katsayılar matrisinde i -inci kolona sırayla sistemin sağ yanındaki tek sütunlu matris yazılır. Bu matrisin determinantı Δ_i ile gösterilir. Buna göre, sistemin çözümü,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} \quad \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}$$

kümesidir.

Uyarı 1.8. $|A| = 0$ ve $\Delta_j \neq 0$ olacak biçimde bir j indisi varsa $AX = B$ doğrusal denklem sisteminin hiç bir çözümü yoktur.

Örnek 1.9.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ x - y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned} \quad (1.16)$$

doğrusal denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözüyoruz.

Çözüm

Örnek (28.2) sisteminin katsayılar matrisinin determinantını, Sarrus yöntemiyle kolayca bulabiliriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad (1.17)$$

olur. Öte yandan bilinmeyenlere karşılık gelen determinanlar;

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad (1.18)$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \quad (1.19)$$

$$|D_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \quad (1.20)$$

Çözüm kümesi,

$$x = \frac{D_x}{|A|} = \frac{3}{3} = 1 \quad y = \frac{D_y}{|A|} = \frac{-6}{3} = -2 \quad z = \frac{D_z}{|A|} = \frac{9}{3} = 3$$

olur.

İki bilinmeyen için Cramer Formülü: Cramer yöntemi iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemlere kolay uygulanır.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= d_1 \\ a_2x + b_2y &= d_2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

denklem sisteminin çözümü D, D_x, D_y matrisleri

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = d_1b_2 - d_2b_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = d_1b_2 - d_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1d_2 - a_2d_1$$

olmak üzere, Sistemin x, y bilinmeyenleri

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada şu özel durumlara dikkat edilmelidir:

Durum 1: $D \neq 0$ ve ise sistemin bir tek çözümü vardır. Sistem tutarlıdır.

Durum 2: $D = 0$ ve $D_x \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 3: $D = 0$ ve $D_x = 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 4: $D = 0$ ve $D_x = D_y = 0$ ise sistem tutarlıdır; sonsuz çözüm vardır.

1.5.2 Üç Bilinmeyen için Cramer Formülü

Cramer yöntemi üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemlere de kolay uygulanır.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \quad (1.22)$$

denklem sisteminin çözümü D, D_x, D_y, D_z matrisleri

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

olmak üzere, Sistemin x, y bilinmeyenleri

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada şu özel durumlara dikkat edilmelidir:

Durum 1: $D \neq 0$ ve ise sistemin bir tek çözümü vardır. Sistem tutarlıdır.

Durum 2: $D = 0$ ve $D_x \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 3: $D = 0$ ve $D_y \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 4: $D = 0$ ve $D_z \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 5: $D = 0$, $D_x = D_y = 0$, $D_z = 0$ ise sistem tutarlıdır; sonsuz çözüm vardır.

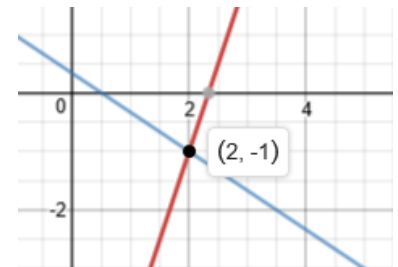
Örnek 1.10.

$$\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned} \quad (1.23)$$

sistemini Cramer yöntemiyle çözüyoruz.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-2) = 11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 21 - (-1) = 22$$



Şekil 1.5: Çözüm: (2, -1)

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 14 = -11$$

olduğundan, Cramer formülünü uygularsak,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2 \quad x = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1$$

çıkar.

Örnek 1.11.

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 2z &= 7 \\ 6x + 2y + 2z &= 8 \\ 2x - 2y + 4z &= 12 \end{aligned}$$

sistemini Cramer yöntemiyle çözüünüz.

Çözüm:

Sarrus yöntemiyle,

$$D = -24, \quad D_x = -24, \quad D_y = 24, \quad D_z = -48$$

bulunur. Buradan Cramer formüllerini yazarsak,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-24}{-24} = 1 \quad x = \frac{D_y}{D} = \frac{24}{-24} = -1, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-48}{-24} = 2$$

çıkar.

1.6 Alıştırmalar

1.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ x - 4y + z &= 35 \\ x - 3y + 4z &= 12 \end{aligned} \quad \text{Çözüm : } (5, 35, -18)$$

2.

$$\begin{aligned} 2x - y + 6z &= 10 \\ -3x + 4y - 5z &= 11 \\ 8x - 7y - 9z &= 12 \end{aligned}$$

Çözüm:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1499}{-141} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1492}{141}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-16}{141}$$

3.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 2 \\ 3x + 2y - z &= -3 \\ x + 2y + 2z &= 10 \end{aligned}$$

sistemini çözüünüz.

Çözüm:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{100}{-50} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-150}{-50}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-25}{-50}$$

Index

Cramer, 27

düzlem, 19

denk sistemler, 22

doğru, 19

doğrual cebir, 19

doğrusal denklem sistemleri, 19

hiper düzlem, 19

lineer cebir, 19

temel matris işlemleri, 22

tutarlı sistem, 20

tutarsız sistem, 20