TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALI DÜZCE

KALKULÜS

NOBEL

Contents

33 *Vektör Değerli Fonksiyonlar* 13

34 *Konikler* 14

35 *Fiziksel uygulamalar* 14

1 Doğrual Denklem Sistemleri

Denklem sitemi sonlu sayıda değişken (belirsiz) içeren sonlu sayıdaki denklemden oluşan eşitlikler topluluğudur. Özel olarak değişkenkerin hepsinin derecesi 1 ise, sisteme *doğrusal denklem sistemi* denilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 3x+2y-z=1 &= -2 \\ -x+\frac{1}{2}y-z &= 0 \\ -x+\frac{1}{2}y-z &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

topluluğu bilinmeyenleri x, y, z olan üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemidir. Algıyı kolaylaştırmak için aynı adlı bilinmeyenler alt alta yazılır.

Sistemdeki her denklemi sağlayan x, y, z değerlerine sistemin bir çözüm kümesi denilir. Yukardaki sistemin her denklem

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

değerleri tarafından sağlanır. Dolayısyla, sırasıyla $\{x, y, z\}$ için $\{1, -2, -2\}$ değerleri (1.1) sisteminin bir çözüm kümesidir.

Bir doğrusal denklem sisteminin hiç çözümü olmayabilir, tek çözümü olabilir ya da sonsuz çözümü olabilir. Bilinmeyen sayısı iki ise, sistemdeki her denklem düzlemde bir doğrunun denklemidir. Bu sistemin tek çözümünün olması için doğruların bir noktada kesişmesi gerekir.

Sistemde üç bilinmeyen varsa, sisteme ait her denklem üç boyutlu uzayda bir düzlem gösterir. Böyle bir sistemin tek çözümünün olması için, düzlemlerin bir noktada kesişmesi gerekir.

Sistemde bilinmeyen sayısı $n > 3$ ise, denklemlerin her birisi n-boyutlu uzayda bir *hiper düzlem* gösterir. Hiper düzlemi duyu organlarımız farkedemez. Ancak akıl yürütmeyle hiper düzlemin varlığını söyleyebiliriz. n boyutlu uzayda verilen doğrusal denklemin tek çözümünün olması için sisteme ait hiper düzlemlerin tek bir noktada kesişmesi gerekir.

Doğrusal denklem sistemlerine uygulamada çok karşılaşılır. Bunların ayrıntılı incelenmesi Doğrual (Lineer) Cebir derslerinde yapılacaktır. Bu kitapta ispatların ayrıntısına girmeden doğrusal denklem sistemlerinin çözümü için pratik bilgiler verilecektir.

1. Grafiksel Çözüm: Değişken sayısı 3 ü geçmiyorsa sistemi oluşturan denlemlerin grafiğini çizerek, hepsinin bir noktada kesişip

kesişmediğini görebiliriz. Bir noktada kesişiyorlarsa, o noktanın koordinatları aranan çözüm olur.

2. *Yerine koyma* Sistem ait denklemleerin birisinden bir değişkenin değeri öteki(ler) cinsinden yazılabilir. Bu değer öteki denklemlerde kullanılırsa, sistemdeki denklem sayısı 1 azalır. Bu işe devam ederek, değişken sayısını 1'e kadar indirebiliriz.

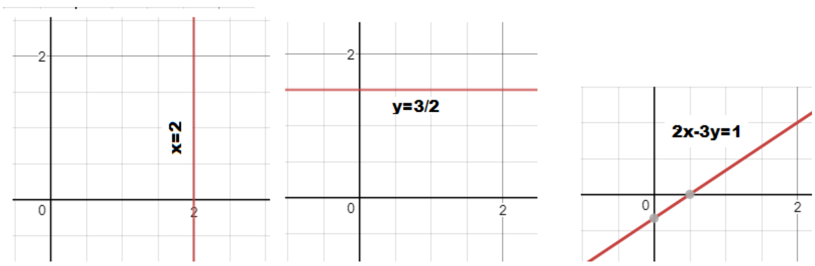
3. *Eleme Yöntemiyle Çözüm:* Gauss-Jordan yöntemi olarak da bilinen bu yöntem esas olarak yerine koyma yöntemine denktir. Sistemdeki iki denklemde bir değişkenin katsayılarını eşitledikten sonra toplama ya da çıkarma yöntemiyle o değişkeni eleyebiliriz. Çıkan denklemden bir değişkeni çekip öteklerde yerlerine koyarsak, bütün sistemde değişken sayısı 1 azalır. Bu işe devam edersek sistemdeki değişken sayısını 1'e kadar indiririz.

4. *Matris Yöntemi:* Bu yöntem sistemdeki denklem sayısı değişken sayısına eşit ve katsayılar matrisinin determinantı sıfır değilse çok değişkenli sistemler için kullanılan oldukça genel bir yöntemdir.

Bu yöntemlerin kullanılışlarını örneklerde inceleyeceğiz.

1.0.1 Sonsuz Çözüm

Şekil 1.1: Doğru Denklemleri



Örnek 1.1.

Şekil (1.1'deki $x = 3$, $y = \frac{3}{2}$ ve $2x - 3y = 1$ sistemlerine ait denklemlerin her birisi düzlemde bir doğru gösterir. Gerçekten birinci denklemi $x + 0y = 2$, ikinci denklemi $0x + y = \frac{3}{2}$ biçiminde yazabiliriz.

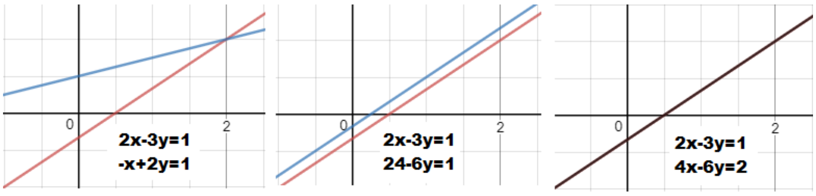
İki değişkenli her denklemin grafiği düzlemde bir doğrudur. Doğru üzerindeki her nokta bir çözümdür. Dolayısıyla iki değişkenli tek denklemden oluşan bu üç doğrusal denklem sisteminin her birisinin *sonsuz çözümü* vardır.

1.0.2 Tek çözüm

Şimdi Şekil (1.2)'deki grafiklere bakalım. Birinci grafikte kesişen iki doğru, ikinci grafikte paralel iki doğru, üçüncü grafikte ise çalışan iki doğru vardır.

(a) Birincide grafikler tek noktada kesiştiği için doğrusal denklem sisteminin tek çözümü vardır. Bu tür sistemlere *tutarlı sistem* denilir.

Şekil 1.2: Tek çözüm, çözüm yok,sonsuz çözüm

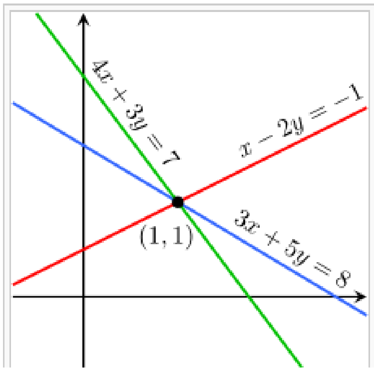


(b) ikinci sistemdeki denklemlerin grafikleri paraleldir. Kesişmezler (ortak noktaları yoktur). Dolayısıyla bu sistemin çözümü yoktur. Çözümü olmayan sistemlere *tutarsız sistem* denilir

(c) Üçüncü sistemdeki iki denklemin grafikleri çakışıyor. Doğrular üzerindeki her nokta her iki denklemi sağlar. Dolayısıyla sistemin sonsuz çözümü vardır.

Örnek 1.2.

$$\begin{aligned} x-2y &= -1 \\ 3x+5y &= 8 \\ 4x+3y &= 7 \end{aligned} \tag{1.2}$$



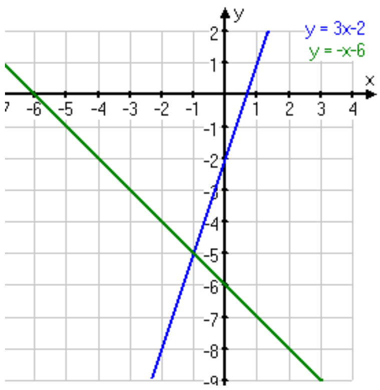
Şekil 1.3: $x-2y01,3x5y=8,4x+3y=7$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

Bu sistemi yerine koyma yöntemiyle çözelim. Bu sistem iki bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir sistemdir. Birinci denklemden $x = 2y-1$ yazabiliriz. Bunu ikinci (ya da üçüncü) denklemde kullanırsak $3(2y-1)+5y = 8 \Rightarrow 11y = 11 \Rightarrow y = 1$ çıkar. Bulunan y değerini üçüncü denklemde (ya da herhangi birisinde) kullanırdsak, $4x+3 = 7 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$ bulunur. Çözüm kümesini bulunca mutlaka sağlamasını yapömalıyız. Bulduğumuz x, y değerleri her üç denklemi sağlıyor Demek ki çözüm $\{x, y\} = \{1, 1\}$ dir. Çözügmü olduğu için bu sistem tutarlıdır.

Örnek 1.3.

$$\begin{aligned} -3x+y &= -2 \\ x+y &= -6 \end{aligned} \tag{1.3}$$



Şekil 1.4: $-3x+y=-2,-x+y-6$

doğrusal denklem sistemini çözünüz.

Bu sitemi eleme yöntemiyle çözelim. y değişkenlerini katsayıları eşit olduğu için, beşka bir eşitlemeye gerek kalmadan, ikinci denklemden birinciyi çıkaralım: $4x = -4 \Rightarrow x = -1$ bulunur. Bu değeri denklemlerden birinde kullanırsak, $1+y = -6 \Rightarrow, y = -5$ bulunur. Sağlamasını yapmak için bulunan değerleri her iki denklemde yerlerine koyarak eşitliklerin sağlandığını görebiliriz. O halde $\{x, y\} = \{-1, -5\}$ çözüm kümesidir.

1.0.3 *Matrislerle Çözüm*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \quad & a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 \quad & a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 \quad & a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = b_n \end{aligned} \tag{1.4}$$

sitemi n-bilinmeyenli n denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemidir. Bu tür denklemlerin çözümü için başlıca üç yöntem izleyebiliriz.

1. Gauss-Jordan Eleme Yöntemi
2. Laplace Yöntemi
3. Cramer Yöntemi

Bunların nasıl olduğunu örnekler üzerinde açıklayacağız.

1.1 Denk Sistmler

Çözümleri aynı olan doğrusal denklem sistemlerine *denk sistemler* denilir.

Yukarıdaki doğrusal denklem siteminden şu özeliklerin sağlandığını hemen görebiliriz:

1. Sistemdeki iki denklemin yerleri değişirse denk bir sistem oluşur. i-yinci satır ile j-ynci satırın yer değiştirmesini $S_i \longleftrightarrow s_j$ simgesityle göstereceğiz.
2. Sistemdeki denklemlerden birisi sabit bir sayı ile çarpılırsa, denk bir sistem elde edilir. i-yinci satırın sabit bişr α sayıs ile çarpımını αS_i simgesiyle gösterceğiz.
3. Sistemdeki bir denklem sabit bir sayı ile çarpışıp başka bir denklemle taraf tarafa toplansa denk bir sistem elde edilir. i-yinci satırın α ile çarpılıp j-yinci satıra eklenmesini $S_j + \alpha S_i$ ile gösterceğiz.

n bilinmeyenli n denklemden oluşan doğrusal denklem sistemi olan (1.4) sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a12 + \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a22 + \ldots a_{2n} \\ \ldots & \\ a_{n1} & an2 + \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

matrisidir. Bu matrisin satırları üzerine yukarıda söylenen işlemler yapılırsa, denk sistemin katsayılar matrisi elde edilir. Matrisin satırları üzerinde yapılan bu işlemlere *temel işlemler* diyeceğiz.

1.4 sisteminin sağ yanı tek sütunlu

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

matrisidir. Benzer şekilde $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bilinmeyenlerini tek kolonlu

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

matrisi biçiminde yazalım.

Doğrusal Denklem Sisteminin çözümü için şu kurallar geçerlidir:

1. Katsayılar matrisinin determinantı $|A| \neq 0$ ise A^{-1} ters matrisi vardır.

2. Katsayılar matrisinin determinantı $|A| \neq 0$ ise, doğrusal denklem sisteminin bir tek çözüm kümesi vardır.

3. Katsayılar matrisinin determinantı $|A| = 0$ ise, doğrusal denklem sisteminin sonsuz çözüm kümesi vardır.

4. (1.4) doğrusalş denklemini , yukarıda anılan matrisleri kullanarak $AX = B$ biçiminde yazabiliriz.

5. A^{-1} ters matrisi varsa, $AX = B$ matris eşitliğinin her iki yanını soldan A^{-1} ters matrisi ile çarparsak $X = A^{-1}B$ eşitliği bulunur. Bu eşitliğin sol yanındaki X sütunmatrisi (1.4) doğrusal denklem sisteminin çözümü olur.

1.2 *İndirgenmiş Satır Eşolon Biçimi*

Bu yöntem eleme yönteminin bir biçimidir. Katsayılar matrisinin sağına, sistemde eşitliklerin sağındaki sütun eklenir. Sonra temel matris işlemleri uygulanarak, soldaki matris birim matris haline dönüştürülür. Elde edilen matris, verilen denklem sistemine denk olan bir denklemin katsayılar matrisidir.

Örnek 1.4.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 5 \\ 2x+3y+5z &= 8 \\ 4x+0y+5z &= 2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:

Verilen denklemin katsayılar matrisine eşitliklerin sağında oluşan sütun matrisini ekledikten sonra belirtilen temel matris işlemlerini yapalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 2 & 3 & 5 & | & 8 \\ 4 & 0 & 5 & | & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{S_2-2S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 4 & 0 & 5 & | & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{S_3-4S_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & -4 & 13 & | & -26 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{\frac{1}{13}S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{S_2-3S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{S_1-S_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{S_1-S_2} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Bu matris

$$\begin{matrix} 1x & 0y & 0z & = & 3 \\ 0x & 1y & 0z & = & 4 \\ 0x & 0y & 1z & = & -2 \end{matrix}$$

denklem siteminin katsayılar matrisidir. Katsayılar matrisi üzerinde yalnızca temel matris işlemleri yapılmıştır. O halde, son denklem sistemi , başta verilen denklem sistemine denktir; yani her ikisinin de çözüm kümeleri aynıdır. Son sistemin çözüm kümesi $\{x, y, z\}0\{3, 4, -2\}$ kümesidir. O halde bu küme verilen ilk denklem sisteminin de çözüm kümesidir: $x = 3,\ y = 4, z = -2$.

1.3 Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu

Eşçarpan ve determinant yardımıyla bir A matrisinin tersinin bulunması beş adımda gerçekleşir:

1. A matrisinin $|A|$ determinantı bulunur.
2. A matrisinin minörleri hesaplanır.
3. A matrisinin $cof(A)$ eşçarpanı (cofactor) bulunur.
4. $cof(A)$ eşçarpanının $\left[cof(A)\right]^T$ devriği (transpose) bulunur.
5. $\left[cof(A)\right]^T$ devriği $\frac{1}{|A|}$ ile çarpılır.

Örnek 1.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm

Adım 1: A matrisinin $|A|$ determinantı:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 434$$

olur.

Adım 2: A matrisinin minörleri:

A matrisinin i-inci satır ve j-yinci kolon minörünü A_{ij} ile gösterelim:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = +(-60) = -60$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -(74) = -74$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +(78) = -78$$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -(-24) = 24$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-41) = 41$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +(-29) = -29$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(75) = -75$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = +(27) = 27$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = +(39) = 39$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(17) = -17$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(-29) = -29$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -(59) = -59$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -(152) = -152$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = +(44) = 44$$

$$A_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -(-24) = 24$$

$$A_{44} = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +(-26) = -26$$

olur.

Adım 3: A matrisinin $cof(A)$ eşçarpanı (cofactor):

A matrisi için yukarıda bulunan minörler yerlerine konulursa;

$$cof(A) = \begin{pmatrix} -60 & -74 & -78 & 24 \\ 41 & -29 & -75 & 44 \\ 39 & -17 & -29 & -59 \\ -152 & 24 & 24 & -26 \end{pmatrix}$$

olur.

Adım 4: $cof(A)$ eşçarpanının devriği:

$$\left[cof(A)\right]^T = \begin{pmatrix} -60 & 41 & 39 & -152 \\ -74 & -29 & -17 & 27 \\ -78 & -75 & -29 & 24 \\ 24 & 44 & -59 & -26 \end{pmatrix}$$

olur.

Adım 5: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[cof(A)\right]^T$ matrisinin hesaplanması:

Örnek 1.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin tersini bulunuz.

A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[cof(A)\right]^T = \frac{1}{|A|}\left[adj(A)\right]$$

formülünden çıkar. $cof(A)$ önceki örnekte bulundu. Onun devriğini (transpose) alıp, $|A|$ determinantı ile yukarıdaki formülde yerlerine yazarsak A^{-1} ters matrisini bulmuş oluruz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 30/217 & -41/434 & -39/434 & 76/217 \\ 37/217 & 29/434 & 17/434 & 22/217 \\ -39/217 & 75/434 & 29/434 & 12/217 \\ -12/217 & -27/434 & 59/434 & 13/217 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= -1 \\ 3x + 5y &= 8 \\ 4x + 3y &= 7 \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.4 Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü

Örnek 1.7.

$$\begin{pmatrix} x & +y+ & z & = & 6 \\ & +2y+ & 5z & = & -4 \\ 2x & +5y+ & -z & = & 27 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

doğrusal denklem sisteminin çözüm kümesini ters matsis kullanarak bulunuz.

Çözüm

Verilen 1.10 sisteminin katsayılar matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

ve sağ yan matrisi

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

sütun matrisidir. Bilinmeyenler matrisi

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

dir. Buradan verilen 1.10 sisteminin katysayılar matrisinin tersini, minörlerini hesaplayarak bulursak;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

olur.

Artık verilen 1.10 sistemini matris biçiminde yazabiliriz.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -27 & 6 & 3 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{pmatrix} = \frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -105 \\ -63 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

olur. Buradan çözüm kümesinin

$$x = 5,\ y = 3,\ z = -2$$

ollduğu görülür. Çözüm eişlemlerini doğru yapıp yapmadığımızı denetlemek istersek, bulduğumuz bilinmeyenleri verilen denklem sisteminde yerlerine koyarak sağlama yapabiliriz.

1.5 Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü

1.5.1 İki Bilinmeyen için Cramer Formülü

Cramer yöntemiyle çözüm determinant hesaplarına dayanır. (1.4) sitemi verildiğinde her $i = 1, 2, \ldots, n$ için katsayılar matrişinde i-inci kolona sırayla sistemin sağ yanındaki tek sütunlu matris yazılır. Bu matrisin determinantı Δ_i ile gösterilir. Buna göre, sistemin çözümü,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}$$

kümesidir.

Uyarı 1.8. *$|A| = 0$ ve $\Delta_j \neq 0$ olacak biçimde bir j indisi varsa $AX = B$ doğrusal denklem sisteminin hiç bir çözümü yoktur.*

Örnek 1.9.

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ x - y - z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

doğrusal denklem sistemini Cramer yöntemi ile çözünüz.

Çözüm

Örnek (28.2) sisteminin katsayılar matrisinin determinantını, Sarrus yöntemiyle kolayca bulabiliriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \tag{1.17}$$

olur. Öte yandan bilinmeyenlere karşılık gelen determinantlar;

$$|D_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \tag{1.18}$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 \tag{1.19}$$

$$|D_z| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \tag{1.20}$$

Çözüm kümesi,

$$x = \frac{D_x}{|A|} = \frac{3}{3} = 1 \qquad y = \frac{D_y}{|A|} = \frac{-6}{3} = -2 \qquad z = \frac{D_z}{|A|} = \frac{9}{3} = 3$$

olur.

İki bilinmeyhen için Cramer Formülü: Cramer yöntemi iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistemlere kolay uygulanır.

$$\begin{aligned} a_1 x &+ b_1 y &= d_1 \\ a_2 x &+ b_2 y &= d_2 \end{aligned} \tag{1.21}$$

denklem sisteminin çözümü D, D_x, D_y matrisleri

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = d_1 b_2 - d_2 b_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix} = d_1 b_2 - d_2 b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} = a_1 d_2 - a_2 d_1$$

olmak üzere, Sistemin x, y bilinmeyenleri

$$x = \frac{D_x}{D}, quad y = \frac{D_y}{D}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada şu özel durumlara dikkat edilmelidir:

Durum 1: $D = \neq 0$ ve ise sistemin bir tek çözümü vardır. Sistem tutarlıdır.

Durum 2: $D = 0$ ve $D_x \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 3: $D = 0$ ve $D_x y \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 4: $D = 0$ ve $D_x = D_y = 0$ ise sistem tutarlıdır; sonsuz çözüm vardır.

1.5.2 Üç Bilinmeyen için Cramer Formülü

Cramer yöntemi üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan sistemlere de kolay uygulanır.

$$\begin{aligned} a_1x &+b_1y &+c_1z = d_1 \\ a_2x &+b_2y &+c_2z = d_2 \\ a_3x &+b_3y &+c_3z = d_3 \end{aligned} \tag{1.22}$$

denklem sisteminin çözümü D, D_x, D_y, D_z matrisleri

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

olmak üzere, Sistemin x, y bilinmeyenleri

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

eşitlikleri ile verilir. Burada şu özel durumlara dikkat edilmelidir:

Durum 1: $D = \neq 0$ ve ise sistemin bir tek çözümü vardır. Sistem tutarlıdır.

Durum 2: $D = 0$ ve $D_x \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 3: $D = 0$ ve $D_y \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

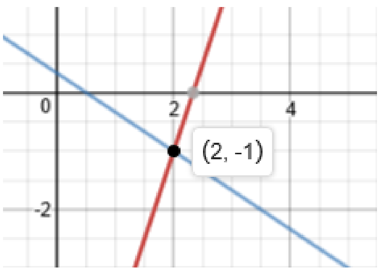
Durum 3: $D = 0$ ve $D_z \neq 0$ ise sistemin çözümü yoktur. Sistem tutarsızdır.

Durum 4: $D = 0$, quad ve $D_x = D_y = 0, \quad D_z = 0$ ise sistem tutarlıdır; sonsuz çözüm vardır.

Örnek 1.10.

$$\begin{aligned} 3x &\quad -y &= 7 \\ 2x &\quad +3y &= 1 \end{aligned} \tag{1.23}$$

sistemini Cramer yöntemiyle çözünüz.



Şekil 1.5: Çözüm: $(2, -1)$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-2) = 11$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 21 - (-1) = 22$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 14 = -11$$

olduğundan, Craqmer fornmülünü uygularsak,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2 \qquad x = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1$$

çıkar.

Örnek 1.11.

$$\begin{array}{llll} 2x & +4y & -2z & = 7 \\ 6x & +2y & +2z & = 8 \\ 2x & -2y & +4z & = 12 \end{array}$$

sistemini Cramer yöntemiyle çözünüz.

Çözüm:

Sarryus yöntemiyle,

$$D = -24, \qquad D_x = -24, \qquad D_y = 24, \quad D_z = -48$$

bulunur. Buradan Cramer formüllerini yazarsak,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-24}{-24} = 1 \qquad x = \frac{D_y}{D} = \frac{24}{-24} = -1, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-48}{-24} = 2$$

çıkar.

1.6 Alıştırmalar

1.

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & = 5 \\ x & -4y & +z & = 35 Çözüm : (5, 35, -18) \\ x & -3y & +4z & = 12 \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{llll} 2x & -y & +6z & = 10 \\ -3x & +4y & -5z & = 11 \\ 8x & -7y & -9z & = 12 \end{array}$$

Çözüm:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-1499}{-141} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{1492}{141}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-16}{141}$$

3.

$$\begin{array}{llll} 2x & -y & +z & = 2 \\ 3x & +2y & -z & = -3 \\ x & +2y & +2z & = 10 \end{array}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{100}{-50} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-150}{-50}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-25}{-50}$$

Index