TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ, ORHAN ÖZER

# KALKULÜS

NOBEL

# 1 Matrisler ve Determinantlar

## 1.1 Matrisler

Matris, nesnelerin dikdörtgensel bir biçemde düzenlenmesidir. Matris içine konulan öğelere, matrisin öğeleri ya da bileşenleri diyeceğiz. Matrisler günlük yaşamda çok kullanılan nesnelerdir. Örneğin, bir tren istasyonunda trenlerin hareket saatlerini gösteren tablo bir matristir. Bir lokantada müşteriye sunulan yemek listesi bir matristir. Bir sınıf listesi bir matristir.

Bu kitapta bileşenleri gerçel sayılar olan matrisleri konu edineceğiz.

**Örnek 1.1.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

matrisi $1 \times 1$ tipinden bir matristir. Tek bileşeni (öğe) 1 dir.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 8 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisinin 2 satırı ve 3 kolonu vardır. $2 \times 3$ tipinden bir matristir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 7 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin 3 satırı ve 3 kolonu vardır. $3 \times 3$ tipindendir.

### 1.1.1 Satır ve Kolon

Birden çok bileşeni olan matrislerde, yatay doğrultuda ve aynı hizada yer alan bileşenlerden oluşan kümeye *satır*, düşey doğtultuda ve aynı hizada yer alan bileşenlerden oluşan kümeye de *kolon* (sütun) denilir. Örneğin, iki satırı ve üç kolonu olan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisi $2 \times 3$ tipinde olan bir matristir. Birinci sıradaki bileşenleri $\{-1, 3, 7\}$ dir. Bunlardan oluşan küme matrisin birinci satırıdır. $\{2, -4, -3\}$ kümesi matrisin ikinci satırıdır.

$\{-1, 2\}$ kümesi matrisin birinci kolonu, $\{3, -4\}$ kümesi matrisin ikinci kolonu, $\{7, -3\}$ kümesi matrisin üçüncü kolonudur.

$m, n$ doğal sayılar olmak üzere m satırı ve n kolonu olan matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

biçemindedir. Buna $m \times n$ tipi matris denilir. Bazen ( ) parantezi yerine [ ] parantezi de kullanılabilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}, \dots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matrisinin m satırı ve n kolonu vardır. Bu tür matrislere $m \times n$ tipindendir diyeceğiz, Matrisin her satırı ve her kolonunu birer *vektör*'dür.

## 1.2 Matrisin Bileşenleri

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisini oluşturan $a_{ij}$ öğelerinin her birisi matrisin bir bileşenidir. Bazen bunlara matrisin *öğeleri* de denilir.

$A$ matrisinin i-inci satırı ile j-inci kolonu içinde yer alan öğeyi $[A]_{ij}$ ya da $a_{ij}$ simgesiyle göstereceğiz.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi için

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 5 \\ a_{21} = -3 & a_{22} = 3 & a_{23} = 6 \\ a_{31} = 7 & a_{32} = 5 & a_{33} = 2 \end{array}$$

olur.

## 1.3 Matris İşlemleri

Sayı kümeleri üzerinde yaptığımız toplama, çıkarma ve bölme işlemleri matrisler üzerinde çok kısıtlı olarak yapılabilir.

Satır ve kolon sayıları karşılıklı olarak eşit olan matrislere aynı tipten matrisler denilir.

### 1.3.1 Matrislerin Toplamı

Aynı tipten olan iki matris toplanabilir. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrislerinin toplamı, aynı indisli bileşenlerinin toplamından oluşur.

$$[A]_{ij}+[B]_{ij}=[A+B]_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})$$

Örneğin,

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&2&1\\4&5&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-3&6\\2&1&-5\\1&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&9\\-1&3&-4\\5&9&4\end{pmatrix}$$

**Teorem 1.2.** *Toplama işlemi yer değişebilir (commutative).*

$$A+B=B+A$$

### 1.3.2 Matrislerde Çıkarma

Aynı tipten olan iki matrisin birisinden ötekisi çıkarılabilir. Çıkarma işlemi toplamanın tersidir. $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$ matrislerinin farkı, aynı indisli bileşenlerinin farkından oluşur.

$$[A]_{ij}-[B]_{ij}=[A-B]_{ij}=(a_{ij}-b_{ij})$$

Örneğin,

$$\begin{pmatrix}9&6\\-3&4\\1&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&-3\\6&2\\7&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&9\\-9&2\\-6&1\end{pmatrix}$$

**Teorem 1.3.** *Çıkarma işlemi yer değişemez (noncommutative).*

$$A-B\neq B-A$$

### 1.3.3 Matrisin Sayı ile Çarpımı

**Tanım 1.4.** *$A$ matrisinin $\lambda$ sayısı ile çarpımı matrisin her bileşeninin $\lambda$ sayısı ile çarpımıdır.*

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13},\dots,a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{i1}&a_{i2}&a_{i3},\dots,a_{in}\\ \vdots&&\\ a_{m1}&a_{m2}&a_{m3},\dots,a_{mn}\end{pmatrix}\ \text{ise}\ \lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\lambda a_{13},\dots,a_{1n}\\ \vdots&&\\ \lambda a_{i1}&\lambda a_{i2}&\lambda a_{i3},\dots,\lambda a_{in}\\ \vdots&&\\ \lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\lambda a_{m3},\dots,\lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

**Örnek 1.5.**

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\ \text{ise}\ 3A=3\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.1&3.2\\3.3&3.4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\9&12\end{pmatrix}$$

olur.

### 1.3.4 Matrislerin Çarpımı

$A$ matrisinin kolon sayısı $B$ matrisinin satır sayısına eşitse $A \times B$ çarpımı tanımlıdır. Bu koşul çarpma işlemi için gerekli bir kısıtlamadır. Bu koşulu sağlamayan iki matris çarpılamaz.

Sayılarda yaptığımız gibi, matris çarpımını $A \times B$, $A.B$ ya da $AB$ simgelerinden birisiyle göstereceğix.

$A \times B = C$ çarpımında $A$ nın i-inci satırın bileşenlerinin $B$ nin j-inci kolonunun bileşenleriyle karşılıklı çarpımlarının toplamı, çarpımın $c_{ij}$ bileşimine eşit olur.

Matrislerin çarpımı, matrisin bir sayı ile çarpımından farklıdır. Satır vektörlerinin kolon vektörleriyle skalar (dot products) çarpımından esinlenerek, matrislerin çarpımına *noktasal çarpım* (dot product) da denilir. Bu kitapta *matris çarpımı* terimini kullanacağız.

**Teorem 1.6.** *Çarpma işlemi yer değişemez (noncommutative).*

$$A \times B \neq B \times A$$

Olumsuz bir örnek göstermek önermeyi kanıtlamaya yeter.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Yapılan örnekleri genelleştirerek, iki matrisin çarpımını tanımlayabiliriz.

**Tanım 1.7.**

$A = (a_{ij})$ $m \times n$ tipinden bir matris, $B = (b_{ij})$ $n \times p$ tipinden bir matris olmak ve $AB$ çarpım matrisi $C = (c_{ij})$ ile gösterilmek üzere

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, p. \tag{1.1}$$

dir. Burada $A$ matrisinin kolon sayısının $B$ matrisinin satır sayısına eşit olması gerekir. $C$ çarpım matrisinin kolon sayısı $A$ matrisinin kolon sayısına ve satır sayısı ise $B$ matrisinin satır sayısına eşittir. Çarpımın $c_{ij}$ öğesi, $A$ matrisinin i-inci satır vektörü (matrisi) ile $B$ matrisinin j-inci kolon vektörünün (matrisinin) noktasal çarpımıdır.

**Teorem 1.8.** *Çarpma işlemi şu özelikleri sağlar:*

1. $(AB)C = A(BC)$ (Birleşme (associative))
2. $(A + B)C = AC + BC$ (sağdan dağılma (distributive))
3. $C(A + B) = CA + CB$ (soldan dağılma)
4. $OA = AO = O$ ( $O$ sıfır matris)

**Örnek 1.9.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 13 & 15 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

**Örnek 1.10.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ y-z \\ -2x+3y \end{pmatrix}$$

**Örnek 1.11.**

Aşağıdaki matris çarpımını yapınız:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

olur.

### 1.3.5 Çarpımın Sırası Değişemez

**Örnek 1.12.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

**Örnek 1.13.**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

### 1.3.6 İkiden çok matrisin Çarpımı

Çarpımın birleşme (associativity) özeliği kullanılarak, ikiden çok matrisin çarpımı yapılabilir. örneğin, $A(BC) = (AB)C$ eşitliğinden yararlanılarak üç matrisin çarpımı yapılabilir. Bu işlemde çarpanların sırası yer değişemez ve ard arda çarpımlarda çarpma işlemlerinin tanımlı olması gerekir.

### 1.3.7 Matrisin Devriği (transpose)

Bir $A$ matrisinin satırları ile sütünlarının yer değiştirmesi durumunda oluşan matrise $A$ nın devriği (transpose) denilir ve $A^T$ ile gösterilir. $A = (a_{ij})$ ise $A^T = (a_{ji})$ dir. Buna göre,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3}, \ldots, a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ise} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31}, \ldots, a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1i} & a_{2i} & a_{3i}, \ldots, a_{mi} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

## 1.4 Matrislerin Çarpımının Devriği

**Teorem 1.14.** *Çarpımın devriği matrislerin devriklerinin çarpımına eşittir.*

$$AB = C \Rightarrow (AB)^T = C^T = B^T A^T \tag{1.2}$$

olur.

*Kanıt:*

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ki})$ olduğunu varsayarsak, çarpım tanımından

$$c^T_{ij} = c_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki}$$

yazabiliriz. Bileşenlerin gerçel sayı olduğunu düşünürsek, çarpma işleminde yer değiştirebilme özeliğini kullanarak

$$\sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{ki} a_{jk}$$
$$\sum_k b_{ki} a_{jk} = \sum_k b^T_{ik} a^T_{kj}$$

olur. Buradan (1.2) eşitliği çıkar.

Teorem 1.14, ikiden çok matrisin çarpımı için de geçerlidir. Örneğin,

$$(ABCD)^T = (CD)^T (AB)^T = (D^T C^T)(B^T A^T) = D^T C^T B^T A^T$$

eşitliği kolayca sağlanabilir. Bunu genelleştirmek istersek,

$$(A_1 A_2 \dots A_n)^T = A^T_n A^T_{n-1} \dots A^T_1$$

eşitliği yazılabilir.

### 1.4.1 Matrislerde Bölme

Sayılarda var olan bölme işlemi matrislerde tanımlı değildir. Ancak $ax = b$ denkleminin çözümü için bilinen

$$x = \frac{b}{a} = a^{-1} b \tag{1.3}$$

eşitliğine benzer bir eylemi bazı matrisler için yapabiliriz. $A$ ile $B$ sabit iki matris, $X$ bilinmeyen bir matris olmak üzere

$$AX = B \tag{1.4}$$

denkleminin çözümü, bazı kısıtlar altında

$$X = A^{-1} B \tag{1.5}$$

biçeminde yazılabilir. Bu eylemi kısıtlı bir matris bölmesi olarak düşünebiliriz.

Ancak, $A$ matrisinin $A^{-1}$ ile gösterdiğimiz tersini bulmak için determinantlar ile ilgili ön bilgileri bilmemiz gerekiyor. Bu konu doğrusal denklem sistemlerinin çözümü ile de ilgilidir. O nedenle, ters matris bulmayı sonraki bölüme bırakacağız.

## 1.5 Matris Türleri

### 1.5.1 Kare Matris

Satır sayısı kolon sayısına eşit olan matrise karesel matris ya da kare matris denilir.

**Örnek 1.15.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi $3 \times 3$ tipinden bir karesel matristir.

### 1.5.2 Sıfır Matris

Bütün bileşenleri 0 olan matrise *sıfır matris* denilir:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi $3 \times 3$ tipinden sıfır matristir.

### 1.5.3 Kare Matrisin Köşegenleri

Sol üst köşeden sağ alt köşeye giden doğrultu üzerindeki bileşenler, kare matrisin *asal* (birincil) köşegenini oluşturur. Sağ üst köşeden sol alt köşeye giden doğrultu üzerindeki bileşenler, kare matrisin *yedek* (ikincil) köşegenini oluşturur.

### 1.5.4 Kare Matrisin Kuvveti

$A$ bir kare matris ise $A$ matrisini kendisiyle art arda çarpabiliriz. Sayılarda yaptığımız gibi, matrisin kuvvetleri için de

$$A = A, \; A.A = A^2, \; A.A.A = A^3, \; \dots A.A.\dots A = A^n$$

simgelerini kullanırız.

### 1.5.5 Birim Matris

Asal köşegen üzerindeki bileşenleri 1 e eşit olan, öteki bütün bileşenleri 0 olan kare matrise birim matris denilir. Örneğin,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi $3 \times 3$ tipinden *birim* matristir.

**Teorem 1.16.** *Birim matris ile çarpıldığında çarpılan matris değişmez.*

Başka bir deyişle çarpım tanımlı olduğunda birim matris çarpma işleminin *birim öğesi* gibi davranır.

$$A.I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

olduğu matrislerin çarpımından görülür. Benzer olarak,

$$I.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

### 1.5.6 Simetrik Matris

Devriği kendisine eşit olan matrise simetrik matris denilir:

$$A^T = A$$

### 1.5.7 Anti Simetrik Matris

Devriği kendisinin ters işaretlisine eşit olan matrise anti simetrik matris denilir:

$$A^T = -A$$

**Örnek 1.17.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrisleri verilsin.}$$

Bunların çarpımı

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \\ 24 & 24 & 24 \end{pmatrix}$$

olur. Buradan çarpımın devriği,

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 15 & 15 & 15 \\ 24 & 24 & 24 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

çıkar. Öte yandan

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

olduğu düşünülürse

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 24 \\ 6 & 15 & 24 \end{pmatrix}$$

eşitliği kurulur.

**Uyarı 1.18.** *Bu sonuç genel hal için de doğrudur; yani $A$ ve $B$ matrislerinin çarpımı tanımlı ise $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliği vardır.*

## 1.5.8 Ters Matris

$B$ matrisinin $A$ matrisiyle soldan ve sağdan çarpımları birim matris oluyorsa, $B$ matrisine $A$ matrisinin çarpmaya göre tersidir, ya da kısaca tersi'dir denilir:

$$AB = I = BA$$

$A$ matrisinin tersi $A^{-1}$ ile gösterilir. Buna göre, yukarıdaki eşitlikler

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

biçimini alır.

## 1.5.9 Üçgensel Matris

Karesel matrisin asal köşegeninin altında kalan bütün bileşenleri sıfıra eşitse, matrise üst köşegenel matris denilir. Benzer olarak, karesel matrisin asal köşegeninin üstünde kalan bütün bileşenleri sıfıra eşitse, matrise alt köşegenel matris denilir.

**Örnek 1.19.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisi üst köşegenel matris,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisi alt köşegenel matristir.

## 1.5.10 Matrisin İzi (trace)

Asal köşegen üzerindeki bileşenlerinin toplamına matrisin izi (trace) denilir.

**Örnek 1.20.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisinin izi

$$iz(A) = tr(A) = 3 + 4 + (-1) + 8 = 14$$

olur.

**Örnek 1.21.**

Örnek (1.20)'de verilen $A$ matrisi için $AA^T$ ve $A^2 = AA$ matrislerini bulunuz.

*Çözüm:*

$$AA^T = \begin{pmatrix} 74 & 41 & -1 & 182 \\ 41 & 54 & 29 & 37 \\ -1 & 19 & 54 & -7 \\ 102 & 37 & -7 & 166 \end{pmatrix} \qquad ve \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 51 & 41 & 42 & 44 \\ 17 & 45 & 22 & 28 \\ -18 & 21 & 50 & 29 \\ 95 & 25 & 88 & 86 \end{pmatrix}$$

olur.

## 1.6 Örnekler

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Matrşisleri veriliyor. u ile b matrislsri benzer olduğundan toplamları ve farkları tanımlıdır. Ama çarpımları tanımlı değildir. Ancak birisinin devriğini (transpose) alırsak çarpımı yapabiliriz:

$$b + v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b.v^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 2, 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix}$$

$$b^T.v = \begin{pmatrix} 2, 4, 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix}$$

## 1.7 Matrisin Uzunluğu (size)

Bir matrisin uzunluğu (size) satır ve kolon sayılarını toplamıdır. Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

matrisinin uzunluğu 1 dir

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & -2 \\ 7 & 5 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisi veriliyor. Bu matrisin uzunluğu $4 + 4 = 8$ dir.

$A$ matsi için$AA^T$ ve $A^2 = AA$ matislerini bulunuz.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 74 & 41 & -1 & 102 \\ 41 & 54 & 19 & 37 \\ -1 & 19 & 54 & -7 \end{pmatrix}$$

ve

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 51 & 41 & 42 & 44 \\ 17 & 45 & 22 & 28 \\ -10 & 21 & 50 & 29 \\ 95 & 25 & 88 & 86 \end{pmatrix}$$

olur.

# Index